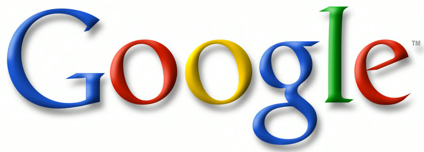




IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATO PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

da E. BETTI e R. FELICI

Terza serie Tomo XVIII.

LUGLIO e AGOSTO

(Pubblicato il 19 settembre 1885)

1885

PISA

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

INDICE

L'elettrocalorimetro confrontato col termometro di *Riess* — Nota del Prof. A. Roiti . . . . . . pag. 5
Ricerche teoriche e sperimentali sul generatore secondario *Gaulard* e *Gibbs* — del Prof. Galileo Ferraris. *(Continuazione)* . . . „ 12
Sulla fotografia delle scintille elettriche, ed in particolare di quelle prodotte nell'acqua — Nota del Prof. A. Righi . . . . „ 49
Nuove ricerche sul fenomeno di *Kerr* — Nota preventiva del Prof. A. Righi „ 54
Fenomeni di riflessione cristallina interpretati secondo la teoria elettromagnetica della luce — Prof. Giuseppe Basso . . . „ 84
Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo — Dott. C. Somigliana *(Continuaz.)* „ 91

RIVISTA

Comptes Rendus, 1885. 1°. semestro. — K. Olszewski. Temperatura di solidificazione dell'azoto e del protossido di azoto, e relazione fra la temperatura e la pressione dell'ossigeno liquido . . . . „ 57
L. F. Menabrea (Générale). Sulla densità e sulla figura della terra . „ ivi
J. Raynaud. Mezzo per diminuire o togliere i danni dell'extracorrente nelle macchine dinamoelettriche, nel caso di rottura del circuito . . „ 58
E. H. Amagat. Sulla densità e sul volume atomico dei gas, e particolarmente dell'ossigeno e dell'idrogeno . . . . „ ivi
Ch.-V. Zenger. Studi spettroscopici . . . . „ 59
A. D'Arsonval. Sul parafulmine a polarizzazione . . . „ ivi
H. Pellat. Studio dei modi per determinare il potenziale dell'aria, e la forza elettromotrice di combustione . . . „ ivi
E. Bichat ed R. Blondlot. Sulle differenze elettriche fra i liquidi, e sull'ufficio dell'aria nelle misure elettrometriche . . . . „ 60
A. Gaiffe. Sopra i galvanometri a telaio curvilineo . . . „ 61
J. Carpentier. Pila a circolazione di liquido . . . „ ivi
H. Deslandres. Relazioni fra lo spettro ultra violetto del vapor d'acqua, e le liste (bandes) telluriche A, B, α dello spettro solare . . „ ivi
L. Laurent. Sopra un apparecchio destinato a verificare la curvatura delle superfici e la refrazione delle lenti . . . „ 62
A. Crova. Sulle osservazioni actinometriche del 1884 nell'Osservatorio della Scuola di Agricoltura a Montpellier . . . . „ ivi
K. Olszewski. Liquefazione e solidificazione del formene e del deutossido d'azoto „ 63
M. Gouy. Sulla diffrazione della luce per un diaframma a contorno rettilineo „ ivi
S. Wroblewski. Sui gas permanenti evaporati nel vuoto, sul termometro a idrogeno, e sulla temperatura per l'espansione dell'idrogeno liquido . „ 64
F. M. Raoult. Influenza della diluizione sul coefficiente di abbassamento del punto di congelazione dei corpi sciolti nell'acqua . . . „ ivi
C. Decharme. Sulle forme vibratorie delle lamine quadrate . . „ 65
MM. Clamond e J. Carpentier. Nuova disposizione di una pila termoelettrica „ ivi
A. Dupré. Sopra una pila a due liquidi . . . . „ ivi
M. Deprez. Sulla regolarizzazione della velocità dei motori elettrici . „ 66
A. D'Arsonval. Sulla soppressione dei vapori nitrosi della pila Bunsen, e sopra una nuova pila depolarizzantesi per mezzo dell'aria . . „ ivi
A. Cornu. Sulle strie spettrali spontaneamente invertibili, e loro analogie con quelle dell'idrogeno . . . . „ ivi

IL NUOVO CIMENTO

ANNO XXXI.

31

IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATO PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

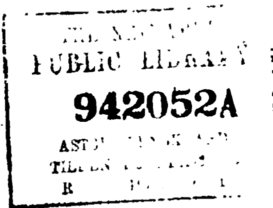
da E. BETTI e R. FELICI

Terza serie Tomo XVIII.

PISA

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

1885


PUBLIC LIBRARY
942052A

L' ELETTROCALORIMETRO CONFRONTATO COL TERMOMETRO DI RIESS; NOTA DEL PROF. A. RÒITI.

Il prof. Gustavo Wiedemann, avendo ricevuto una copia del mio lavoro ([1]) nel quale è descritto l' elettrocalorimetro fondato sulla deformazione delle spirali Breguet, richiama gentilmente la mia attenzione sopra una vecchia Memoria di E. Lenz ([2]), dove si dichiara che il termometro di Breguet, adoperato da De la Rive per misurare le correnti elettriche, non è strumento da meritare fiducia alcuna, se prima non venga sottoposto ad un esame accurato. Ed il prof. G. Wiedemann riassume nel suo prezioso trattato ([3]) gli scrupoli di E. Lenz, nutriti pure da Poggendorff, dicendo non esser permesso ritenere che la spirale venga riscaldata ugualmente in tutte le sue parti, giacchè la corrente si divide fra i diversi metalli, che la compongono, in ragione della loro conduttività: e, se anche le temperature tendono a diventare uguali per conduzione, ciò non può mai effettuarsi compiutamente, essendo che la corrente produce di bel nuovo quantità di-

(1) *Di un elettrocalorimetro e di alcune misure fatte con esso intorno al generatore secondario* Gaulard e Gibbs. — *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino.* Adunanza del 12 Aprile 1885. — *Nuovo Cimento*, Ser. 3. Vol. XVII.

(2) E. Lenz. *Ueber die Eigenschaften der magneto-elektrischen Ströme. Eine Berichtigung des Aufsatzes von Hrn. De la Rive über denselben Gegenstand.* — *Annalen der Pysik und Chemie.* Vol. 48, pag. 383 (Anno 1839).

(3) *Die Lehre von der Elektricität.* Vol. II, pag. 389.

verse di calore nei metalli diversi. E finisce il Wiedemann col dare la preferenza al termometro di Riess nel quale, com'è noto, si osserva la dilatazione dell'aria per effetto del calore cedutole da un filo metallico che conduce la corrente.

Non si può negare che le prevenzioni contro l'impiego delle spirali bimetalliche nella misura delle correnti sieno fondate, specialmente volendo servirsi di notevoli variazioni di temperatura come pare abbia fatto De la Rive nel lavoro criticato da Lenz. Ma gl'inconvenienti di questo metodo di misura non sono quali si potrebbe credere appoggiandosi alla grande autorità di Lenz, Poggendorff e Wiedemann: e certamente non sono per intero imputabili al termometro Breguet le conchiusioni di De la Rive circa una pretesa diversità nelle leggi che governano il passaggio delle correnti magneto-elettriche e delle idro-elettriche; ma sono piuttosto imputabili alle cognizioni incomplete che allora si avevano intorno all'effetto termico della corrente, alla polarizzazione galvanica ed all'induzione.

Si ammette generalmente che le deformazioni di un'elica bimetallica riescano proporzionali alle sue variazioni di temperatura, quando la temperatura sia la medesima nei due metalli componenti l'elica. Ritenendo ciò, torna evidente che, entro gli stessi limiti e con la stessa approssimazione, si deve pure ammettere la proporzionalità fra le deformazioni e le variazioni di temperatura anche se queste sono differenti nei due metalli, ma si mantengono in un rapporto costante; giacchè la diversità di tali variazioni produrrà l'effetto medesimo che produrrebbe il sostituire ad uno di quei metalli un terzo metallo dotato di un altro coefficiente di dilatazione. Se è il metallo più dilatabile che più si riscalda, ne risulterà una deformazione maggiore, e risulterà minore nel caso contrario; ma sempre la deformazione varierà proporzionalmente con le due temperature.

Dunque, se si dimostra che in un'elica bimetallica percorsa da una corrente elettrica gli eccessi di temperatura sull'ambiente si mantengono, alla fine di un dato tempo, fra loro proporzionali, e proporzionali alle quantità di calore che la corrente elettrica vi svolge nell'unità di tempo, sarà pienamente giustificato l'uso che ho fatto delle eliche Breguet nel mio elettrocalorimetro.

Suppongo che si tratti sempre di variazioni di temperatura

così piccole da poter ritenere costanti la resistenza elettrica, il calore specifico ed i coefficienti di conduttività termica. Ciò posto, se $q\,dt$ è la quantità del calore svolto nel primo metallo nel tempuscolo dt, quella svolta nel secondo si potrà esprimere con $hq\,dt$, essendo h una costante. Se poi indichiamo con θ_1 e θ_2 gli eccessi di temperatura che al tempo t presentano i due metalli sull' ambiente, potremo esprimere con $c_1 \frac{d\theta_1}{dt} dt$ e con $c_2 \frac{d\theta_2}{dt} dt$ il calore impiegato a scaldarli, con $a_1 \theta_1 dt$ ed $a_2 \theta_2 dt$ il calore ceduto all' ambiente, e con $b(\theta_1 - \theta_2)$ il calore ceduto dal primo al secondo metallo; così che potremo stabilire le equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} c_1 \dfrac{d\theta_1}{dt} + (a_1 + b)\,\theta_1 = q + b\theta_2 \\ c_2 \dfrac{d\theta_2}{dt} + (a_2 + b)\,\theta_2 = hq + b\theta_1 \end{cases}$$

dove le a, b, c, h sono costanti, e q è una funzione data del tempo t. Di più le funzioni incognite θ_1 e θ_2 devono annullarsi per $t = 0$.

Ponendo:

$$(2) \qquad \phi = \theta_1 + \lambda\,\theta_2$$

le equazioni (1) potranno essere rappresentate dalla:

$$(3) \qquad \frac{d\phi}{dt} + \left(\frac{a_1 + b}{c_1} - \frac{b}{c_2}\lambda\right)\phi = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{h}{c_2}\lambda\right)q\ ,$$

dove per λ si sostituiscano i due valori λ_1, λ_2 che sodisfano all' equazione:

$$(4) \qquad \lambda^2 - \frac{c_2(a_1 + b) - c_1(a_2 + b)}{bc_1}\lambda - \frac{c_2}{c_1} = 0\ .$$

Ora, se si pone:

$$A = \frac{a_1 + b}{c_1} - \frac{b}{c_2}\lambda \quad ; \qquad B = \frac{1}{c_1} + \frac{h}{c_2}\lambda$$

la (3) diventa:

$$(3)' \qquad \frac{d\phi}{dt} + A\phi = Bq$$

che dà:

$$q = \mathrm{B}e^{-\mathrm{A}t}\int_0^t q\, e^{\mathrm{A}t}\, dt \, .$$

Ora, nel caso di corrente costante, è:

$$q = \text{costante}$$

e quindi ponendo:

$$\psi = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\left(1 - e^{-\mathrm{A}t}\right),$$

sarà:

$$\phi = \psi \bar{q} \, .$$

Nel caso di correnti periodicamente variabili, il cui periodo τ sia molto piccolo di fronte a t, si potrà ritenere sensibilmente:

$$\int_0^t q\, e^{\mathrm{A}t}\, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau q\, dt \int_0^t e^{\mathrm{A}t}\, dt \, ,$$

così che scrivendo:

$$q' = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau q\, dt$$

per la quantità di calore svolta nell'unità di tempo, sarà pure:

$$\phi = \psi q'$$

Se poi indichiamo con ψ_1, ψ_2 i valori corrispondenti alle due radici λ_1, λ_2, sarà per la (2):

$$\theta_1 = \frac{\lambda_1\psi_2 - \lambda_2\psi_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot q' \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot q' \, .$$

E si scorge che alla fine di un dato tempo t gli eccessi di temperatura θ_1 e θ_2 sono fra loro proporzionali, e sono proporzionali al calore q' svolto dalla corrente durante l'unità di tempo in uno dei metalli.

Dunque mandando una corrente in un' elica bimetallica per un tempo fisso, la deformazione prodotta dal riscaldamento può dare la misura del calore svolto: e l' elettrocalorimetro si può utilmente sostituire all' elettrodinamometro.

Se non basta questa giustificazione teorica, richiamo il confronto da me fatto (1) fra l'elettrocalorimetro e la bussola assoluta delle tangenti, dal quale risultò che le indicazioni del primo strumento erano proporzionali al quadrato dell' intensità della corrente. E la sola obbiezione che ancora si possa fare è che in quel confronto ho avuto ricorso alla corrente costante della pila Daniell, e poi per lo studio del generatore secondario di Gaulard e Gibbs ho dovuto necessariamente mandare nel calorimetro delle correnti variabili. Per toglier di mezzo anche questo dubbio, e dimostrare sperimentalmente che le eliche Breguet si deformano in proporzione del calore svolto da correnti periodiche, ho confrontato l' elettrocalorimetro col termometro di Riess, che da tutti è ritenuto giusto.

Invece di osservare, come ha suggerito Riess, gli spostamenti d' una colonna liquida nel cannello capillare del suo termometro, ho approfittato d' un piccolo artifizio cui ricorro da più anni per mostrare in lezione gli effetti termici delle scariche e delle correnti elettriche. Lascio il termometro di Riess senza liquido, ne congiungo il cannello con un timpano di Marey (2) sul quale, al posto della leva, ho applicato un piccolo specchio, e proietto sopra una scala verticale l' imagine di un filo teso davanti ad una fiamma. La sensibilità del termometro è in tal guisa accresciuta quanto occorre per poterlo confrontare con l' elettrocalorimetro.

La corrente si divideva in due rami derivati, costituiti dai due strumenti e da due reocordi: e fra i punti di derivazione si trovava il solito tasto di piccolissima resistenza, che toglieva la circolazione della elettricità negli strumenti per tutto il tempo che era abbassato; e che poi si alzava per un tempo determinato col pendolo.

Interpolatamente si adoperava o un elemento Daniell, o una macchinetta di Marcel Deprez, modificata così da dare le correnti alternate: e si faceva variare l' intensità media della corrente sia inserendo delle resistenze nel ramo principale, sia mutando la velocità della macchina magneto-elettrica. Il rapporto poi delle sensibilità dei due strumenti si poteva cambiare mercè il reocordo aggiunto a ciascuno nel suo ramo derivato.

(1) Tavola I della Memoria citata.

(2) *Tambour à lévier*. — Vedi *La méthode graphique* par E. J. Marey, pag. 446.

Un inconveniente si è presentato a rendere il confronto meno stringente di quello che avrei desiderato. La *prontezza* dei due strumenti è molto diversa; giacchè il termometro di Riess arriva alla sua deviazione definitiva molto prima dell' elettrocalorimetro; e però il rapporto delle sensibilità dipende assai dal tempo durante il quale si tiene alzato il tasto per far passare la corrente negli strumenti. Ciò non sarebbe un gran male se si potesse aspettare la deviazione definitiva in entrambi: oppure, osservando quella massima dovuta ad un breve passaggio, se fosse trascurabile l' inerzia delle parti mobili nei due apparecchi. Ma la prima cosa non è possibile, e la seconda non si verifica.

Non è possibile la prima, poichè per una lunga osservazione il termometro di Riess non è abbastanza protetto dalle perturbazioni, ed anzi dà indicazioni molto meno regolari dell' elettrocalorimetro anche per osservazioni brevi.

Non è trascurabile l' inerzia delle parti mobili, perchè i due specchietti sono abbastanza massicci ed hanno velocità notevolmente diverse, quando si riabbassa il tasto per fare le letture. Sono quindi persuaso che si debba ascrivere a questa circostanza se i numeri della seguente tavola accennano che la indicazione dell' elettrocalorimetro aumenti un poco più rapidamente di quella del termometro di Riess: e sono pure persuaso che arriverò a constatare la costanza perfetta del rapporto fra le indicazioni dei due strumenti, se mi riuscirà di protegger meglio dalle influenze esterne il termometro di Riess, e di accrescere la prontezza dell' elettrodinamometro.

La poca prontezza che ha ora, io l' attribuisco ai due filini di argentana che ho interposti fra i grossi reofori di rame e le eliche Breguet per meglio localizzare in queste il calore. Quei filini si scaldano più delle eliche, ed il calore deve poi passare a queste per conduzione e quindi con una certa lentezza; mentre che la sottile spirale di platino è fissata direttamente, nel termometro di Riess, a grosse asticelle d' ottone le quali esercitano un' azione raffreddante. — Sopprimendo quei fili d' argentana, sacrificherò un poco della sensibilità, che è già esuberante, e guadagnerò in prontezza.

Queste modificazioni non posso farle subito perchè devo assentarmi per parecchio tempo dal mio laboratorio: e devo intanto

accontentarmi di riferire la seguente serie di esperienze, benchè lasci a desiderare miglior concordanza.

Ad ogni modo mi pare che, imperfetta com'è, valga a convincere, con l'identità dei rapporti medi avuti dalla pila e dalla macchina magneto-elettrica, che i risultati da me ottenuti mediante l'elettrocalorimetro pel generatore secondario di Gaulard e Gibbs, sono degni di fede.

Durata del passaggio della corrente 10 secondi.

N, numero d' ordine delle osservazioni.

V, numero dei giri della macchina magneto-elettrica.

α, deviazioni dell' elettrocalorimetro } ridotte ad archi

β, » del termometro di Riess } ridotte ad archi

Δ, differenze dalla media di $\frac{\alpha}{\beta}$.

Corrente costante della pila Daniell.

N	α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$	Δ
	c	c		
7	4,03	3,85	1,047	— 0,034
6	5,05	4,83	1,046	— 35
5	6,54	5,98	1,094	+ 13
8	7,60	7,07	1,075	— 6
4	8,76	8,38	1,045	— 36
20	10,34	9,46	1,093	+ 12
9	10,47	9,92	1,055	— 26
22	10,78	10,00	1,078	— 3
2	12,34	11,22	1,100	+ 19
30	13,43	12,56	1,069	— 12
10	15,22	13,85	1,100	+ 19
23	15,61	14,33	1,089	+ 8
31	16,23	14,88	1,091	+ 10
3	17,27	15,69	1,101	+ 20
1	18,66	17,00	1,098	+ 17
26	19,62	17,57	1,112	+ 31

Media 1,081

Corrente periodica della macchina magneto-elettrica.

N	V	α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$	Δ
		c	c		
17	30	5,67	5,36	1,058	— 0,025
11	30	8,32	7,48	1,112	+ 29
27	30	9,10	8,75	1,040	— 43
18	30	10,27	9,60	1,070	— 13
16	30	10,71	10,27	1,043	— 40
28	34	11,17	10,47	1,067	— 16
21	30	12,31	11,31	1,088	+ 5
19	30	12,44	11,60	1,072	— 11
12	30	13,43	12,10	1,110	+ 27
29	20	14,65	13,58	1,079	— 4
14	30	14,83	13,68	1,084	+ 1
13	30	16,88	15,35	1,100	+ 17
24	30	18,59	16,68	1,115	+ 32
15	30	18,73	17,09	1,096	+ 13
25	30	19,46	17,41	1,118	+ 35
			Media	1,083	

Firenze, 27 Giugno 1885.

RICERCHE TEORICHE E SPERIMENTALI SUL GENERATORE SECONDARIO GAULARD E GIBBS; DEL PROF. GALILEO FERRARIS (1).

§ 7° *Descrizione delle nuove esperienze fatte per mezzo del calorimetro.*

Feci le mie esperienze dall'11 al 16 di novembre 1884 nei locali dell'Esposizione di Torino sugli apparecchi ivi esposti dalla *National Company for the distribution of electricity by Secondary Generators* di Londra, e, come ho detto or ora, le feci collo scopo principale di controllare i risultati già ottenuti coll'elettrometro e coll'elettrodinamometro per mezzo di quelli ricavati con un metodo nuovo nel quale tali apparecchi non fossero adoperati come strumenti di misura. Assecondando un desiderio de' miei colleghi della Giurìa internazionale, io mi studiai di far servire alle determinazioni, come unico strumento di misura, un

(1) *Continuazione e fine.* V. pag. 218 del volume precedente.

calorimetro, strumento contro il quale non esistevano le obbiezioni che si potevano sollevare e si erano sollevate contro l'uso degli strumenti suaccennati.

E non potendo escludere completamente l'uso dell'elettrometro e dell'elettrodinamometro, disposi però le cose in modo che tali strumenti non dovessero servire direttamente a fare misure, ma servissero unicamente quali mezzi per riconoscere la costanza di una media differenza di potenziali e del medio valore della intensità di una corrente.

Questa di non richiedere l'uso di altro strumento di misura che di un calorimetro è la principale particolarità del nuovo metodo, e se si fa astrazione dalle modificazioni che l'impiego del nuovo strumento di misura doveva inevitabilmente introdurre nella condotta delle esperienze, il metodo si riduce, nel principio, ad uno di quelli di cui abbiamo dianzi parlato.

Nella sostanza esso è il seguente: si misura per mezzo di un calorimetro la media dei quadrati della intensità della corrente secondaria, media che moltiplicata per la resistenza misurata del circuito secondario, dà la quantità di energia svolta nell'unità di tempo nel circuito secondario medesimo. Tolto allora dal circuito l'apparecchio di Gaulard, gli si sostituisce una resistenza priva di selfinduzione, della quale si fa variare il valore fino a tanto che si abbia fra le sue due estremità, con una medesima intensità di corrente, una media differenza di potenziali uguale a quella che prima si aveva fra le estremità della spirale primaria; con una misura calorimetrica fatta col medesimo calorimetro dianzi adoperato si determina allora la media dei quadrati della intensità della corrente primaria, media che, moltiplicata per la resistenza misurata, dà il valore dell'energia che questa trasforma in calore. La resisteaza inserita nel circuito primario al posto del generatore secondario è quella che nella teoria abbiamo detto r_1, e quindi la quantità di energia calcolata nel modo su detto è quella che dicevamo Q. Dividendo per questa l'energia misurata nel circuito secondario si ha m; dividendo l'elevazione di temperatura del calorimetro nel primo esperimento per quella ottenuta nel secondo si ha il rapporto dei medii quadrati della intensità delle due correnti; e siccome si hanno anche le resistenze r' del secondario, ed r_1 sostituita al prima-

rio, così si posseggono tutte le grandezze che figurano nelle nostre equazioni, e si ha quindi quanto basta per uno studio completo dell'apparecchio.

Quando io intraprendeva le mie esperienze non aveva ancora pensato a svolgere le considerazioni teoriche che ho esposto in questo lavoro. Quindi il mio piano mirava essenzialmente alla determinazione di *m*. Tuttavia si vedrà che le esperienze possono effettivamente somministrare tutti i dati di cui si può avere bisogno; ed io penso che i miglioramenti, che sono parecchi ed importanti, che altri potranno introdurre in esse, consisteranno nei particolari degli strumenti e non nel principio. Un procedimento radicalmente diverso si potrebbe avere soltanto quando si ricorresse ad una misura diretta dinamometrica del lavoro assorbito dal generatore secondario. Ora una tale misura non si può sempre eseguire colla voluta esattezza e non si sarebbe per esempio potuto eseguire nel caso delle mie esperienze ove la macchina dinamo-elettrica servente ai generatori secondarii era di tale potenza da poter assorbire sessanta cavalli, e riceveva il movimento da una motrice a vapore di oltre a 140 cavalli, la quale attivava contemporaneamente molte altre macchine.

Descrizione delle esperienze. — L'apparato calorimetrico (1) consiste essenzialmente in una spirale di filo di argentana di diametro di 0,4 millimetri e della lunghezza di circa 2,40 metri, avvolta su di un disco di ebanite, coperta di una spalmatura di gomma lacca, ed immersa nell'acqua di un calorimetro di rame argentato, chiuso, del diametro di circa 12 centimetri e dell'altezza di 20 centimetri. Il calorimetro è protetto nel modo solito da un recipiente cilindrico di ottone, chiuso, il quale a sua volta è protetto da una cassa di legno. Il termometro, che passa in un foro centrale esistente nel disco di ebanite, è tenuto da un tappo forato in una tubolatura esistente nel centro del coperchio. Esso ha una graduazione in decimi di grado, ed è osservato per mezzo di un cannocchiale col quale si apprezzano con sicurezza i quinti

(1) Il calorimetro era stato preparato, in parte, da una Commissione nominata dalla Giurìa, e composta dei Prof. H. E. Weber di Zurigo, E. Voit di Monaco, A. Roiti di Firenze e dell'autore della presente Memoria. Esso doveva servire per esperienze da farsi dalla Giurìa; esperienze che poi non poterono essere intraprese.

di divisione, ossia i cinquantesimi di grado. Due fori praticati nel coperchio e muniti di tubetti di caoutchouc indurito lasciano passare liberamente due fili di rame di 1,1 millimetri di diametro attaccati inferiormente alle estremità della spirale e portanti superiormente i morsetti per la inserzione nei circuiti. Per mezzo di questi fili si può far passare la corrente nella spirale. Una traversa di ebanite collega esternamente i due fili ed è attaccata ad un cordoncino passante su di una carrucola, per mezzo del quale si può imprimere alla spirale un regolare moto di saliscendi dell'ampiezza di circa tre centimetri, il quale serve a rinnovare l'acqua in contatto del filo ed a rendere uniforme la temperatura nel calorimetro.

Adoperando, come io feci, un medesimo calorimetro, tanto per la misura sul circuito secondario, quanto per quella sul circuito primario, si evitano le difficoltà delle misure assolute; si evita anzi il bisogno di determinare la costante del calorimetro e la resistenza della spirale, costante e resistenza che scompariscono nei quozienti che si hanno a calcolare.

La costanza della intensità media della corrente primaria si ottiene per mezzo del regolatore della corrente eccitatrice della macchina dinamoelettrica, e si constata per mezzo di un elettrodinamometro di Siemens inserto nel circuito. La costanza della media differenza di potenziali fra i due morsetti terminali della spirale primaria del trasformatore, o tra le estremità della resistenza che nella seconda parte dell'esperimento viene sostituita all'apparecchio, si ottiene col far variare questa resistenza, e si constata con un elettrometro di Mascart adoperato col metodo di Joubert. Quando la differenza di potenziali è superiore a quella per cui l'elettrometro è servibile, si uniscono i due punti, pei quali si vuole constatare la costanza della media differenza di potenziali, con un circuito derivato di grandissima resistenza fatto con lampade ad incandescenza riunite in tensione, e si attaccano i fili dell'elettrometro a due punti convenienti di detto circuito. Siccome non si hanno a fare misure, ma semplicemente si vuole constatare la costanza dei potenziali, così non importa conoscere le resistenze delle lampade nè verificare la loro uguaglianza; unicamente è necessario che la resistenza sia grandissima acciocchè la derivazione non disturbi sensibilmente i feno-

meni che avvengono nel generatore secondario. Nelle mie esperienze si adoperarono ordinariamente dodici lampade Edison, delle quali si comprendeva fra gli attacchi dei fili dell' elettrometro un numero che si faceva variare da esperienza ad esperienza, in modo da avere nell' elettrometro una deviazione compresa nei limiti della scala, ma sempre molto grande.

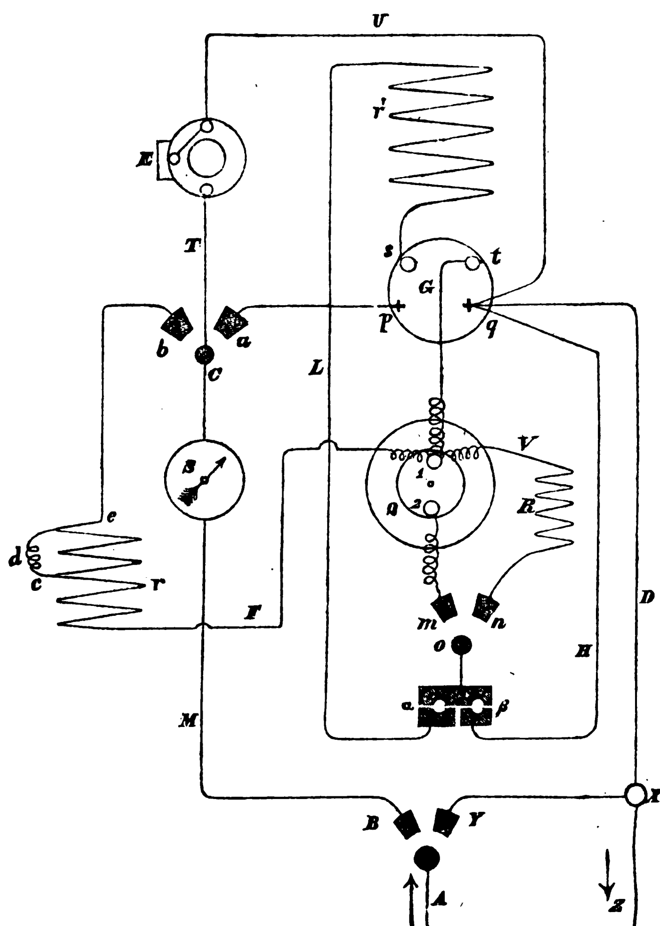


Fig. 2.

La disposizione per le esperienze è schematicamente rappresentata nella fig. 2.

I due reofori, che vengono dalla macchina dinamoelettrica, entrano nel laboratorio ([1]) in A ed in Z. Il reoforo A viene ad un commutatore a due contatti B, Y, per mezzo del quale, senza rompere mai il circuito (il che colla macchina a corrente alternativa di Siemens che può assumere una forza elettromotrice di più di 3000 volt potrebbe arrecare gravi inconvenienti), si può a piacimento inviare la corrente, pel contatto B, agli apparecchi di misura, oppure farla passare, pel filo Y X, direttamente al reoforo Z, escludendo così dal circuito l'intero laboratorio.

Dal contatto B, pel filo M, la corrente viene ad un elettrodinamometro di Siemens S destinato a constatare la costanza della sua intensità; e dall'elettrodinamometro passa ad un secondo commutatore Cab, il quale la fa passare al generatore secondario G quando il contatto è stabilito su a, oppure la manda nella resistenza variabile r e nel calorimetro Q quando il contatto viene stabilito su b.

Il generatore secondario è rappresentato in proiezione orizzontale in G; le due croci p, q rappresentano i due morsetti terminali della spirale primaria; i due circoletti s, t rappresentano invece i morsetti terminali della spirale secondaria. Il capo p della spirale primaria comunica per mezzo di un filo col contatto a del commutatore Cab che abbiamo nominato poc' anzi; l'altro capo q comunica con due fili D ed H, dei quali il primo viene ad unirsi al reoforo Z, e l'altro conduce ad un commutatore a spina, a due vie, $\alpha\ \beta$, di cui si dirà fra poco. La spirale secondaria ha una delle sue estremità s in comunicazione con una resistenza senza selfinduzione r' il cui valore si può far variare a piacimento da una esperienza all'altra, e per mezzo del filo L col commutatore $\alpha\ \beta$ testè nominato. L'altra estremità t comunica invece colla estremità 1 di uno dei fili di rame del calorimetro.

Il calorimetro è rappresentato schematicamente in Q, ove i circoletti 1 e 2 figurano i morsetti terminali dei fili di rame che inferiormente vanno ad unirsi alle due estremità della spirale di argentana immersa nell'acqua. Ad uno di questi morsetti, al

(1) Serviva da laboratorio una stanza situata nell'edifizio dell'Esposizione a circa 180 metri di distanza dalla dinamo. Il filo collegante la dinamo col laboratorio misurava una lunghezza di circa 600 metri.

morsetto 1, sono attaccati il filo F che viene dalla resistenza variabile *r*, il filo *t* 1 che viene dalla spirale secondaria del generatore secondario G, ed un terzo filo V il quale conduce ad una resistenza R.

L' altro morsetto, il morsetto 2, del calorimetro e l'altra estremità della resistenza R sono congiunte coi due contatti *m* ed *n* di un commutatore a strisciamento *omn*, per mezzo del quale, senza interrompere ma il circuito, si può far passare la corrente attraverso al calorimetro, oppure attraverso alla resistenza R. La resistenza VR è esente da selfinduzione, ed è uguale a quella del calorimetro. L'uguaglianza ottenuta con molta cura prima di incominciare le esperienze veniva di quando in quando verificata nel corso delle esperienze medesime.

Il commutatore $\alpha\beta$ è destinato a inserire il calorimetro, a piacimento, nel circuito secondario oppure nel circuito primario ove sta la resistenza variabile *r*.

Questo commutatore è, come si è già detto, a spina ed a due vie; quando la spina è in α esso chiude il circuito secondario $sr'L\alpha 01t$ inserendovi il calorimetro o la resistenza laterale R; quando invece la spina è in β il circuito secondario è rotto, ma si può far passare pel calorimetro o per R la corrente primaria secondo il percorso $ABMSCbrF10\beta HqDZ$. La spina deve trovarsi in β tutte le volte che il commutatore C*ab* fa contatto su *b*, perchè altrimenti il circuito primario sarebbe rotto; e siccome colla macchina dinamoelettrica che io adoperava nella Esposizione, comandata da un motore di grande potenza, una rottura del circuito primario avrebbe potuto presentare inconvenienti e pericoli gravissimi, così io prima di manovrare i commutatori C*ab* ed $\alpha\beta$ poneva sempre il commutatore A B Y sul contatto Y, escludendo per tal modo dal circuito l'intiero laboratorio.

L'elettrometro a quadranti di Mascart è schematicamente rappresentato in E. Esso è collegato ai punti C e *q*. Per maggiore chiarezza si è supposto nella figura che il collegamento sia fatto direttamente con due semplici fili T, U; nella realtà però, e per le ragioni dette più sopra, i due punti C e *q* erano, nelle mie esperienze, congiunti l'uno all'altro per mezzo di un conduttore di grandissima resistenza formato con una serie di 12 lampade Edison da 16 candele messe in tensione, il filo T era

attaccato in C ed il filo U era attaccato ad un punto del detto conduttore preso dopo un numero di lampade che si faceva variare da esperienza ad esperienza, secondo il bisogno.

Quando col commutatore C*ab* era stabilita la comunicazione tra C ed *a* l'elettrometro indicava la media caduta di potenziali tra le due estremità *p* e *q* della spirale primaria dell'apparecchio Gaulard; quando invece col commutatore C*ab* era stabilita la comunicazione di C con *b* l'elettrometro indicava la caduta di potenziali tra le estremità *b* e *q* del conduttore *br*F10βH*q* il quale comprendeva il calorimetro oppure la resistenza laterale uguale R, e comprendeva inoltre la resistenza *r* che si poteva far variare a piacimento, onde ottenere nell'elettrometro una deviazione uguale a quella dovuta al generatore secondario.

La resistenza *r*, come la *r'*, è ottenuta per mezzo di una spirale di grosso filo di argentana doppio avvolta a larghe spire su di un grande telaio di listelli di legno. Per evitare gli effetti della selfinduzione la spirale era avvolta in modo che la corrente discendesse per le spire d'ordine impari e risalisse per le spire d'ordine pari. La spirale completa aveva una resistenza di circa 16 ohm. Per far variare comodamente la resistenza *r* senza interrompere mai il circuito il commutatore C*ab* invece di avere, come per semplicità si è supposto nella figura, due soli contatti *a* e *b*, ne aveva dieci; il primo di questi comunicava come l'*a* della figura col morsetto *p* del generatore secondario; gli altri comunicavano per mezzo di altrettanti fili di rame con diversi punti della spirale *r*. Le piccole variazioni poi della resistenza *r* si ottenevano per mezzo di un filo di rame *d* saldato in *e* all'origine della spirale *r*, del quale l'estremità *c* poteva farsi scorrere lungo la spirale medesima e fissarsi in una posizione qualunque.

La resistenza del conduttore C*br*F10βH*q* si misurava immediatamente dopo di ciascun esperimento per mezzo di un ponte di resistenza a ciò predisposto, che si collegava coi punti C e *q*. Subito dopo si misurava col medesimo ponte la resistenza del circuito secondario completo, tra i punti α ed *o*.

Ora ecco con quale ordine si procedeva in ciascun esperimento. Messa nel circuito secondario una certa resistenza *r'* misurata, si collocava nel commutatore $\alpha\beta$ la spina in α, e col commutatore C*ab* si faceva contatto su *a*; il commutatore *omn*

del calorimetro si disponeva col contatto su *n* in modo da escludere il calorimetro e inserire in sua vece nel circuito la resistenza uguale V R. Ciò fatto, si faceva col commutatore A B Y contatto su B e si faceva con ciò arrivare la corrente nel laboratorio. La corrente primaria passava allora per BMSC*ap*G*q* DXZ e faceva così funzionare il generatore secondario G, producendo una corrente secondaria la quale partendo da *s* passava per *r'*L*αon*RV1*t*. Un osservatore leggeva le deviazioni dell'elettrodinamometro S e dell'elettrometro E, ne constatava la costanza, e le registrava. Intanto un altro osservatore leggeva la temperatura del calorimetro.

Ad un segnale del primo osservatore il secondo girava il commutatore *o m n* del calorimetro facendo contatto su *m* ed inviando la corrente secondaria per *m* 2 nel calorimetro.

Dopo un minuto, ad un secondo segnale, l'osservatore applicato al calorimetro rimetteva il commutatore su *n* e leggeva la nuova temperatura. Durante l'osservazione un aiutante teneva in moto la spirale del calorimetro per rinnovare l'acqua in contatto del filo e rendere uniforme la temperatura. Così era fatta la prima parte dell'esperimento.

Posto il commutatore ABY sul contatto Y per escludere dal circuito il laboratorio, e poter maneggiare senza pericoli i commutatori, si toglieva la spina del commutatore *αβ* da *α* e la si collocava in *β*; e si girava il commutatore C *a b* in modo da separare C da *a* e stabilire il contatto fra C e *b*. Si girava quindi il commutatore A B Y sul contatto B e si faceva così rientrare la corrente. La corrente primaria percorreva allora il circuito BMSC*br*F1UR*noβ*H*q*DZ senza passare pel generatore secondario, e passando invece per la resistenza variabile *r* e pella resistenza laterale R dell'apparecchio calorimetrico. Le indicazioni dell'elettrodinamometro S e dell'elettrometro E si trovavano allora, in generale, diverse da quelle della prima parte dell'esperimento; ma la variazione della deviazione dell'elettrodinamometro S, sempre assai piccola, veniva tosto corretta dall'operatore applicato alla macchina dinamoelettrica, il quale si serviva a quest'uopo di un altro elettrodinamometro e del regolatore della corrente eccitatrice; e la deviazione dell'elettrometro, la quale in generale aveva variato notevolmente, si riduceva al va-

lore primitivo, che si era trovato nel primo esperimento, facendo variare per tentativi la resistenza r. Quando l'elettrometro e l'elettrodinamometro davano indicazioni costanti ed uguali a quelle del primo esperimento, si faceva girare il commutatore *o m n*, mandando per tal modo nel calorimetro la corrente primaria. Come nel primo esperimento si lasciava trascorrere un minuto, dopo del quale, ad un segnale dell'osservatore addetto all'elettrometro, si escludeva nuovamente dal circuito il calorimetro sostituendogli la resistenza R, e si leggeva sul termometro l'elevazione della temperatura.

Appena finito l'esperimento si escludeva nuovamente il laboratorio dal circuito per mezzo del commutatore ABY; si attaccava il ponte di resistenza ai punti C e q, distaccando per maggior precauzione il filo D, e si misurava così la resistenza del conduttore $CbrF10\beta q$ che nel secondo esperimento aveva rimpiazzato il generatore secondario.

Si rimisurava finalmente la resistenza del circuito secondario.

§ 8°. *Risultati delle esperienze.*

Riunisco qui sotto i principali dati relativi al generatore secondario, sul quale si sono eseguite le misure, i risultati di queste, e le osservazioni che ad esse si riferiscono.

Dati relativi al generatore secondario. Il generatore secondario sperimentato è uno di quelli che il Gaulard destina ad assorbire e trasformare l'energia di circa 1,8 cavalli dinamici.

Esso ha le dimensioni di quello indicato nella tabella delle esperienze del sig. Uzel col nome di *grande colonna,* dal quale differisce unicamente pel modo con cui è fatto il nucleo di ferro. Mentre il nucleo dell'apparecchio sperimentato dal sig. Uzel era intieramente costituito da un fascio di fili di ferro, quello del generatore secondario, su cui si fecero le misure calorimetriche, è fatto con un bastone cilindrico di legno ricoperto da uno strato di circa quattro millimetri di fili di ferro. I principali dati su tale generatore sono i seguenti:

Numero dei dischi nella spirale primaria. .	455	
Id. Id. secondaria .	455	
Diametro dei dischi	114	mm.
Id. del foro centrale	54	mm.
Grossezza dei dischi di rame	0,25	mm.
Altezza della colonna	610	mm.
Peso complessivo del rame dei dischi . .	18280	grammi
Peso totale dell' apparato. . . . . circa	20	chilogr.
Numero delle parti uguali in cui la spirale secondaria è divisa	4	
Resistenza della spirale primaria alla temperatura di 13 gradi	0,276	ohm.
Resistenza della spirale secondaria alla medesima temperatura quando le quattro parti sono collegate in circuito semplice.	0,285	ohm.
Intensità della corrente primaria colla quale l'apparecchio è destinato a funzionare abitualmente e colla quale funzionò durante le esperienze . . . . . circa	12	ampère.

In tutte le esperienze le quattro parti, in cui si può dividere la spirale secondaria, furono riunite in circuito semplice, ossia *in tensione*. Siccome il calorimetro presentava una resistenza considerevole, così se si fossero collegate le spirali secondarie in circuito multiplo, ossia *in quantità*, si sarebbe sperimentato in condizioni sempre molto diverse da quelle nelle quali il Gaulard è solito a far funzionare il suo apparato.

Nelle prime 7 esperienze registrate nella tabella riportata qui sotto la spirale del calorimetro aveva una resistenza di 4,18 ohm; nelle esperienze successive la spirale fu cambiata con un'altra di resistenza uguale a 3,97 ohm.

La macchina dinamoelettrica di Siemens, che somministrava la corrente primaria, faceva durante le esperienze, in media, 670 giri per minuto. Le spirali mobili della macchina erano 24; quindi si avevano 16080 inversioni di corrente al minuto, ossia 268 al minuto secondo. La macchina era comandata, come si è già avuto occasione di notare, da una motrice a vapore di oltre a 140 cavalli, la quale attivava contemporaneamente altre mac-

chine. Ciò dava luogo spesso a variazioni sensibili nella velocità, che non si poterono mai evitare completamente, e delle quali noi dovremo tener conto in seguito, quando si tratterà di scegliere, fra i varii possibili, il modo di calcolare le esperienze.

Nelle misure compendiate nella tabella seguente si faceva variare da esperienza ad esperienza il valore della resistenza r' del circuito secondario. La prima esperienza (n° 1) è fatta col circuito secondario contenente la sola resistenza della spirale indotta, del calorimetro e dei fili d'unione. L'ultima (n° 14) è fatta col circuito secondario rotto, ossia con una resistenza $r'=\infty$.

I risultati di tutte le misure sono compendiati nel seguente quadro, nel quale le lettere, con cui sono intestate le varie finche, hanno i seguenti significati:

t_0' e t' rappresentano le temperature del calorimetro al principio ed alla fine dell'esperimento calorimetrico sul circuito secondario (prima parte dell'esperienza);

t_0 e t sono le temperature del calorimetro lette al principio ed alla fine dell'esperimento calorimetrico sul circuito primario (seconda parte dell'esperienza);

r_1 è la resistenza del conduttore $b\,r\,\mathrm{F}\,1\,o\,\beta\,\mathrm{H}\,q$ (fig. 2), che nella seconda parte dell'esperienza rimpiazza il generatore secondario;

r' finalmente è la resistenza totale del circuito secondario $\alpha\,\mathrm{L}\,r'\,s\,t\,1\,o$.

Risultati delle esperienze eseguite nei giorni 11, 12, 13, 14, 15 e 16 Novembre 1884.

Numero d' ordine	CALORIMETRO NEL SECONDARIO		CALORIMETRO NEL PRIMARIO		RESISTENZE	
	t_0'	t'.	t_0	t	r_1	r'
1	10,60	16,95	16.18	22.80	4.80	4.70
2	8.90	15,00	14.98	21,55	5.18	5.09
3	15.50	21,00	19.90	26,00	6,10	6.10
4	14.96	20,32	24.70	30.70	6,73	6.80
5	11.28	17,29	16,05	22,90	7,50	7.73
6	9.10	13.80	13,60	19.50	9,17	10,02
7	8,90	13,90	13.70	19,70	9,53	10,02
8	17.65	22,00	21,62	27,42	10,72	12,12
9	16,45	20.20	19,92	25,70	12,55	15,43
10	9,05	13.00	12,75	19,00	14,70	17.70
11	14.20	17,98	16,68	22,26	15,14	17,73
12	18.35	22,02	21,70	27,90	15.35	19.80
13	16,64	19,92	19,48	25,42	16.17	21,50
14	—	—	14,50	20,20	22,36	∞

§ 9°. *Calcolo delle esperienze. — Osservazioni preliminari.*

Diciamo p la costante del calorimetro, R la resistenza della spirale immersa nel medesimo; rappresentiamo poi con i_m^2 ed $i_m'^2$ le medie dei quadrati delle intensità delle due correnti primaria e secondaria durante gli esperimenti; abbiamo:

$$Ri_m^2 = p(t-t_0)\ ,\quad Ri_m'^2 = p(t'-t_0')\ ,$$

e quindi

$$\left(\frac{i_m}{i_m'}\right)^2 = \frac{t-t_0}{t'-t_0'}\ . \tag{46}$$

Questo valore è indipendente da p; e quindi se noi avremo cura di far servire ai nostri calcoli formole nelle quali non figurino i valori assoluti delle intensità medie i_m ed i_m' delle due correnti primaria e secondaria, ma figuri invece solamente il loro rapporto, noi potremo fare tutte le determinazioni senza andare incontro alle difficoltà inerenti alle misure calorimetriche assolute. Egli è appunto per questo scopo che il piano delle espe-

rienze è stato studiato in modo da far servire un medesimo calorimetro tanto per le misure da farsi sul circuito secondario quanto per quelle che si hanno da fare sul circuito primario.

È necessario però per la esattezza delle determinazioni, che per tutta la durata di ciascun esperimento rimangano invariate la costante del calorimetro e la resistenza R del medesimo. Ora se la prima condizione si può assicurare senza difficoltà, la seconda invece non può mai essere soddisfatta in modo rigoroso, in causa dell'ineguale riscaldamento a cui la spirale va soggetta nelle due parti dell'esperimento. Se, come accade in generale, le elevazioni di temperatura $t-t_0$ e $t'-t_0'$ ottenute nel calorimetro rispettivamente quando esso è inserito nel circuito primario e quando è inserito nel secondario, sono diverse, ciò significa che nel medesimo tempo, in un minuto, la spirale cede all'acqua del calorimetro quantità di calore diverse, e ciò, a sua volta, dimostra che la temperatura della spirale ha valori diversi nei due casi. Alla differenza delle temperature della spirale nelle due parti dell'esperimento corrisponde una differenza di resistenza, in grazia della quale il valore di $\left(\frac{i_m}{i_m'}\right)^2$ calcolato colla (46) può essere affetto da un errore. È necessario, prima di intraprendere i calcoli, rendersi conto dell'ordine di grandezza di tale errore.

Diciamo, a quest'uopo, h il coefficiente di conduttività termica esterna del filo del calorimetro quando è immerso nell'acqua, F la superficie del filo in metri quadrati, x la media differenza di temperatura tra il filo e l'acqua durante una misura calorimetrica nel circuito primario; il numero di calorie trasmesso dal filo all'acqua in un'ora è hFx, e in un minuto: $\frac{hFx}{60}$. D'altra parte questo numero di calorie fa elevare l'acqua dalla temperatura t_0 alla temperatura t; e siccome in media, nelle mie esperienze, la costante del calorimetro era circa 1,3, così tale numero di calorie vale 1,3 $(t-t_0)$.

Si ha adunque per determinare x l'equazione

$$\frac{hFx}{60} = 1,3\,(t-t_0)\ ,$$

ove h si deve intendere riferito alla caloria per ora e per metro quadrato.

Nei miei esperimenti si aveva $F=2,40 \times 0,001=0,0024$. Per calcolare h con esattezza mancano i dati: si può tuttavia valutare per h un valore certamente minore del vero, col quale si possa calcolare, se non il valore esatto di x, almeno un valore certamente più grande del vero, dal quale si possa dedurre almeno un limite superiore dell' errore che si commette facendo uso della formola (46). Gli ingegneri sanno che un tubo metallico, p. e. di rame, di piccolo diametro immerso nell' acqua e pieno di vapore può condensare in un' ora, per ogni metro quadrato di superficie e per ogni grado di differenza di temperatura tra il vapore e l' acqua, 2,5 chilogrammi di vapore se l' acqua è in riposo e fino a 10 chilogrammi se l' acqua bolle. Certamente il peso di vapore condensato sarebbe più grande ancora se l'acqua invece di rinnovarsi in contatto del tubo unicamente in grazia di moti idrostatici, fosse rinnovata artifizialmente con un agitatore. E siccome si sa pure che il coefficiente di conduttività esterna cresce col diminuire del diametro del tubo, così è certo che esso sarebbe assai maggiore di quello che corrisponde alla condensazione di 10 chilogrammi di vapore quando invece di un tubo si avesse un semplice filo sottile. Noi faremo adunque un errore in meno nel valore di h ed un errore in più nel calcolo di x se faremo l' ipotesi che, pel nostro filo, h sia quello che corrisponde alla condensazione di 10 chilogrammi di vapore a 100°.

Avremo per conseguenza un limite dell' errore che si tratta di apprezzare, limite molto superiore al vero, ponendo $h=10 \times 537=5370$.

Posto questo valore, abbiamo

$$x = 6,05\,(t-t_0)\ .$$

La temperatura del filo del calorimetro durante l' esperimento sarà in media $x+\frac{t+t_0}{2}$, ossia, con un sicuro errore in più:

$$6,05\,(t-t_0)+\frac{t+t_0}{2}\ ;$$

quindi la resistenza sarà aumentata, rispetto a quella corrispondente a 0°, nel rapporto di uno a

$$1+0,00044\left[\,6,05\,(t-t_0)+\frac{t+t_0}{2}\right].$$

Similmente durante l' esperienza col calorimetro nel circuito secondario la resistenza sarà quella corrispondente a 0° moltiplicata per

$$1 + 0{,}00044 \left[6{,}05(t' - t_0') + \frac{t'+t_0'}{2} \right] .$$

Quindi il valore di $\left(\frac{i_m}{i_m'}\right)^2$ calcolato colla formola (46) dovrà essere moltiplicato per

$$\frac{1 + 0{,}00044 \left[6{,}05(t' - t_0') + \frac{t'+t_0'}{2} \right]}{1 + 0{,}00044 \left[6{,}05(t - t_0) + \frac{t+t_0}{2} \right]}$$

ossia, approssimativamente, per

$$\varepsilon = 1 - 0{,}00044 \left[6{,}05(t + t_0' - t_0 - t') + \frac{t + t_0 - t' - t - t_0'}{2} \right] .$$

In causa dell' incertezza del valore di h di cui ci siamo serviti, questa formola non potrebbe servire a fare effettivamente la correzione di cui si tratta; ma siccome siamo certi che la correzione fatta con questa formola sarebbe certamente eccessiva, così questa è utile per darci un' idea dei limiti degli errori che possano derivare dal far uso della formola (46) senza alcuna correzione.

A quest' uopo ci basta calcolare colla formola trovata l' errore pel caso della prima e per quello dell' ultima delle nostre esperienze, giacchè per tutte le altre esso avrà un valore intermedio. Ora per la esperienza n° 1 abbiamo

$$t + t_0' - t' - t_0 = 0°{,}27 \ , \qquad \frac{t + t_0 - t' - t_0'}{2} = 5°{,}71 \ ;$$

quindi

$$\varepsilon = 0{,}997 \ .$$

Per la penultima esperienza, ossia per l' esperienza n° 13, ove l' errore di cui si tratta è massimo abbiamo

$$t + t_0' - t_0 - t' = 2°{,}66 \ , \ \text{e} \ \frac{t + t_0 - t' - t_0'}{2} = 4°{,}17 \ ;$$

quindi

$$\varepsilon = 0{,}991 \, .$$

Si vede quindi che l'errore che si fa nel calcolo di $\left(\frac{i}{i'}\right)^2$ ommettendo la correzione pel riscaldamento del filo è, nei limiti delle nostre esperienze, minore del 3 per mille se si tratta di piccole resistenze r'; minore del 9 per mille se si tratta di grandi resistenze. E siccome il calcolo che abbiamo fatto è basato su di un valore di h molto probabilmente assai minore del vero, così è da credere che nella realtà l'errore commesso stia notevolmente al di sotto del limite ora calcolato. D'altronde i risultati delle esperienze adoperati nei calcoli, come fra poco vedremo, non dànno alcun indizio di un errore sistematico nel valore di $\frac{t-t_0}{t'-t_0'}$, errore che, sapendosi crescente con r' e sempre del medesimo segno, sarebbe facile a riconoscersi qualora superasse l'ordine di grandezza degli errori accidentali di osservazione. Se quindi si osserva che per la natura stessa de' nostri esperimenti non si potrà contare con sicurezza più che sulla seconda cifra decimale nei valori dei risultati, si è autorizzati a non tenere nessun conto del riscaldamento del filo e ad adoperare senza alcuna correzione la formola (46).

Premesse queste osservazioni, possiamo servirci dei risultati delle esperienze raccolti nella tabella che abbiamo dato qui sopra.

§ 10°. *Valori dei rapporti* **m** e **g**.

Possiamo innanzi tutto calcolare coi dati delle esperienze i valori del rapporto

$$m = \frac{q'}{Q} \, ,$$

che tutti gli sperimentatori scambiarono finora col coefficiente di rendimento totale, e l'altro

(47) $$g = \frac{r'-\rho'}{r'} m \, ,$$

che venne finora scambiato col coefficiente di rendimento esterno od utile.

Abbiamo infatti

$$Q = p(t-t_0)\frac{r_1}{R}\ ,\ q' = p(t'-t_0')\frac{r'}{R}\ ,$$

e quindi

$$m = \frac{t'-t_0'}{t-t_0}\frac{r'}{r_1}\ . \tag{48}$$

Avuto m si calcola subito anche g.

Raccogliamo nello specchietto seguente, d'accanto alla indicazione del numero d'ordine delle esperienze ed ai valori di r' alle medesime relativi, i valori di m calcolati colla (48) e coi numeri registrati nel quadro dei risultati delle esperienze, ed i valori di g calcolati colla (47) nella quale si è posto $\rho'=0,285$. Le colonne ove sono registrati i valori di m e di g dedotti direttamente dalle esperienze sono intestate m e g. D'accanto a questi sono registrati in altre due colonne intestate (m) e (g) i valori di m e di g calcolati con una formola empirica di cui diremo.

VALORI DI m E DI g.

N.° d'ordine	r'	m	(m)	δ	g	(g)	δ
1	4,70	0,94	0,93	+ 0,01	0,87	0,87	0
2	5,09	0,91	0,92	— 0,01	0,86	0,87	— 0,01
3	6,10	0,90	0,91	— 0,01	0,86	0,87	— 0,01
4	6,80	0,90	0,90	0	0,86	0,86	0
5	7,73	0,90	0,89	+ 0,01	0,87	0,86	+ 0,01
6	10,02	0,87	0,87	0	0,85	0,84	+ 0,01
7	10,02	0,88	0,87	+ 0,01	0,85	0,84	+ 0,01
8	12,12	0,85	0,84	+ 0,01	0,83	0,82	+ 0,01
9	15,43	0,80	0,81	— 0,01	0,79	0,79	0
10	17,70	0,76	0,78	— 0,02	0,75	0,77	— 0,02
11	17,73	0,79	0,78	+ 0,01	0,78	0,77	+ 0,01
12	19,80	0,76	0,76	0	0,75	0,75	0
13	21,50	0,73	0,74	— 0,01	0,72	0,73	— 0,01

I valori di m e di g registrati in questa tabella hanno, come vedesi, l'andamento che si era trovato per mezzo di misure fatte coll'elettrometro e coll'elettrodinamometro. Nei limiti delle

nostre esperienze il valore di m diminuisce di mano in mano che cresce r'; ed il valore di g dopo di essere rimasto sensibilmente costante per r' compreso fra 4,70 e 7,73 ohm, diminuisce anch' esso gradatamente quando si dànno ad r' valori più grandi. Se su di un disegno si portano come ascisse i valori di r' e si pigliano come ordinate i valori del rapporto m, si trovano punti che stanno sensibilmente su di una linea retta inclinata, la quale discende verso l' asse delle ascisse per valori crescenti di r'. L' equazione di una tale retta, trovata coi dati delle nostre esperienze mediante il metodo dei minimi quadrati, è

$$(49) \qquad m = 0{,}977 - 0{,}011\, r'.$$

Prolungata, essa andrebbe a tagliare l' asse delle ordinate nel punto di ordinata 0,977 e l' asse delle ascisse nel punto di ascissa 88,8.

La linea le cui ordinate rappresentano, entro i limiti delle nostre esperienze, i valori di g, si può dedurre da quella che dà i valori di m per mezzo della relazione (47). Sostituendo infatti nella formola (47) ad m il suo valore ricavato dalla (49), e ricordando che ρ' vale 0,285 ohm, si ottiene l' equazione

$$(50) \qquad g = 0{,}980 - 0{,}011\, r' - \frac{0{,}278}{r'}\,,$$

ed è questa l' equazione della linea che rappresenta l'andamento dei valori di g.

Questa equazione fa vedere che il valore di g è massimo per $r' = 50{,}3$.

Nelle colonne dello specchietto precedente, le quali sono intestate (m) e (g), sono registrati i valori di m e di g calcolati per mezzo delle due equazioni empiriche ora date. Le colonne intestate δ contengono le differenze tra i valori ricavati direttamente dalle singole esperienze e quelli calcolati.

Basta ora confrontare i risultati precedenti con quelli trovati per mezzo dell' elettrometro e dell' elettrodinamometro, per vedere subito che l' andamento dei valori di g, e quindi anche quello di m, è, per resistenze comprese nei limiti fra i quali si estesero le nostre esperienze, approssimativamente lo stesso nelle due serie di esperienze. Per rendere più chiaro il confronto pos-

siamo calcolare per mezzo della equazione (50) i valori di g che le nostre esperienze calorimetriche avrebbero dato corrispondentemente a valori di r' uguali a quelli con cui sperimentò il sig. Uzel, e confrontare coi numeri trovati da questo sperimentatore quelli calcolati. Fra le esperienze del sig. Uzel sul generatore secondario grande disposto in tensione sono comprese nei limiti fra cui si aggirarono le misure calorimetriche le cinque ultime; noi facciamo quindi il confronto per queste: calcoliamo colla (50) i valori di g corrispondenti ai valori 5,50, 7,53, 9,00, 10,60, 12,60 di $r'-\rho'$ e li scriviamo di fronte a quelli trovati dal sig. Uzel pei medesimi valori di $r'-\rho'$. Abbiamo così il quadro seguente:

$r'-\rho'$	g Uzel	(g) Calcolato	δ
5,50	0,898	0,868	0,030
7,53	0,893	0,859	0,034
9,00	0,889	0,848	0,041
10,60	0,867	0,835	0,032
12,60	0,854	0,817	0,037
		MEDIA	0,035

il quale fa vedere che, a meno di una differenza sensibilmente costante ed uguale in media a 0,035, i valori di g trovati per mezzo dell' elettrometro e dell' elettrodinamometro seguono l'andamento di quelli trovati colle misure calorimetriche. Le esperienze elettrometriche del sig. Uzel, come tutte quelle finora eseguite, si accordano colle misure calorimetriche nell' indicare l'esistenza di un massimo di g per un valore di r' compreso tra 5 e 6 ohm; e ciò aveva fatto credere che a tale valore di r' corrispondesse il massimo di rendimento.

Ma risulta dalle considerazioni teoriche che noi abbiamo premesso, che la frazione g non rappresenta in nessun modo il coefficiente di rendimento del generatore secondario ; coefficiente che noi dobbiamo ancora determinare, e che varia, come vedremo, secondo una legge completamente diversa.

La differenza 0,035 esistente fra i valori di g ricavati dalle esperienze di Uzel e quelli calcolati per mezzo delle esperienze

calorimetriche dipende essenzialmente dalla diversità fra i nuclei dei due apparecchi su cui si fecero le esperienze, uno dei quali è, come si è detto, tutto di ferro e l'altro è di legno ricoperto di uno strato di fili di ferro. Tale differenza tra i valori di g non implica necessariamente una differenza nei valori del coefficiente di rendimento, valori che noi saremo condotti a riconoscere esattamente uguali.

§ 11°. *Coefficiente di rendimento.*

Il calcolo che abbiamo fatto dei valori di m e di g ed i confronti ai quali esso ha dato occasione hanno unicamente lo scopo di fare un primo confronto fra i risultàti delle esperienze calorimetriche e quelli delle esperienze anteriori. Per lo studio dell'efficacia del generatore secondario esso ha poca importanza giacchè i rapporti m e g non rappresentano nè il coefficiente di rendimento, nè qualche altra grandezza che per l'uso pratico dell'apparato importi conoscere. La questione che veramente ci interessa ed alla soluzione della quale dobbiamo far servire i risultati delle nostre esperienze è quella di sapere quale sia il rapporto tra il coefficiente di rendimento effettivo, pratico, dell'apparecchio ed il coefficiente di rendimento teorico, che abbiamo imparato a calcolare colle formole (36) e (37) nella prima parte della presente Memoria.

Un modo di risolvere tale questione consiste nel calcolare per mezzo dei valori di m or ora trovati e coll'aiuto della formola (44), ossia della

$$(44) \qquad \mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{r'm}{C}\right)^2}},$$

i valori corrispondenti del coefficiente di rendimento μ, e poi paragonare i valori di μ così dedotti dalle esperienze con quelli calcolati colla formola teorica (36). Alla determinazione del valore di C, che bisogna conoscere per far uso della formola, può servire la (18), oppure la (27), oppure ancora, e più comodamente, la (28'), la quale sussiste quando si esperimenta col circuito secondario aperto. E di questo procedimento noi ci serviremo più avanti.

Ma pel calcolo delle nostre esperienze calorimetriche tale procedimento, benchè, come vedremo, sia perfettamente servibile, non è il più conveniente. Bisogna infatti ricordare una osservazione che abbiamo dovuto fare nel descrivere le esperienze. Abbiamo notato nel descrivere le esperienze, che il motore che metteva in movimento la macchina dinamoelettrica di Siemens, la quale generava la corrente primaria, metteva in movimento contemporaneamente molte altre macchine dinamoelettriche le quali funzionavano nella galleria della Esposizione. E siccome tali macchine, funzionanti davanti al pubblico, ora erano attive, ed ora venivano fermate, così il lavoro assorbito dal loro complesso variava continuamente. Conseguenza inevitabile di questo fatto era che la velocità della dinamo e quindi i valori di T, di C e di i_m subivano variazioni repentine e talora piuttosto grandi. L'inconveniente si è notato specialmente nelle esperienze dei giorni 15 e 16 novembre, giacchè essendo quelli gli ultimi giorni della Esposizione non si sarebbero potuti obbligare i varii espositori che ricevevano la forza motrice dalla nostra macchina a vapore a tenere inoperosi i loro apparati. Lo stesso espositore dei generatori secondari utilizzava, in quei giorni, mentre si facevano le esperienze, la sua macchina dinamoelettrica, la quale, come abbiam detto, poteva assorbire sessanta cavalli, a far funzionare altri generatori secondari. Siccome adunque per evitare le difficoltà delle misure calorimetriche assolute si facevano le misure sul circuito secondario e sul primario in due esperienze successive, così poteva accadere che i valori di i_m e di r_1 misurati non fossero esattamente quelli che si sarebbero trovati se si fossero potuti determinare nel momento in cui si faceva la misura calorimetrica sul circuito secondario. Quindi un errore, che sebbene cogli artifizi che abbiamo descritto più sopra si cercasse di rendere minimo, non sarebbe stato possibile evitare completamente.

Ora un errore fatto nella determinazione di i_m si riproduce, collo stesso valore relativo, nel valore di m dedotto dalle esperienze, e quindi, come mostra la formola (44), dà luogo nel calcolo di μ ad un errore relativo ancora più grande. Al quale errore si sovrappone quello che per la variazione di I e di T si fa nella determinazione della costante C, errore che, come vedremo, è ordinariamente considerevole.

Conviene adunque che noi non ci serviamo del descritto procedimento se non dopo di aver risolto la questione con un metodo, nel caso attuale, migliore.

Noi possiamo risolvere meglio la questione servendoci di una formola nella quale figurano tutte le grandezze misurate in ciascun esperimento e vi figurano combinate in modo che gli errori dovuti ad una eventuale variazione della intensità i_m si compensano quasi completamente.

Poniamo, adottando le solite notazioni,

$$i_m^2 = \frac{I^2}{2} . \tag{51}$$

Se nell' apparecchio non avesse luogo perdita alcuna di energia, la corrente primaria i_m genererebbe una corrente secondaria della quale il quadrato della intensità media sarebbe $\frac{I'^2}{2}$, ed I' avrebbe quel valore che, pel dato valore di I, si può determinare colle formole che abbiamo stabilito nello studio teorico suesposto. Se invece c' è, come dobbiamo sospettare, una perdita di energia, al valore dato di i_m, o, ciò che val lo stesso, al valore dato di I corrisponde un valore minore di i_m'; e se con I' seguitiamo a rappresentare il valore teorico corrispondente al dato I, abbiamo

$$i_m'^2 = u \frac{I'^2}{2} . \tag{52}$$

ove u è una frazione. Il problema nostro si riduce a determinare questa frazione.

Ora le uguaglianze (51) e (52) dànno

$$\left(\frac{i_m}{i_m'}\right)^2 = \frac{1}{u} \left(\frac{I}{I'}\right)^2 ;$$

e quindi la (46)

$$\left(\frac{I}{I'}\right)^2 = u \frac{t-t_0}{t'-t_0'} . \tag{53}$$

Intanto $\left(\frac{I}{I'}\right)^2$ si può pure esprimere in funzione delle resistenze per mezzo della formola (27″) che qui trascriviamo:

$$\left(\frac{I}{I'}\right)^2 = \frac{r'(r'+2\rho)}{r_1^2-\rho^2} ; \tag{27″}$$

e se uguagliamo questi due valori, noi otteniamo l' equazione

$$u\,\frac{t-t_0}{t'-t_0'}=\frac{r'(r'+2\rho)}{r_1^2-\rho^2}\;;$$

la quale non contiene altro che l'incognita u colle temperature e colle resistenze misurate nelle esperienze. Essa ci dà:

$$(54)\qquad u=\frac{r'(r'+2\rho)}{r_1^2-\rho^2}\,\frac{t'-t_0'}{t-t_0}\,,$$

od anche

$$(55)\qquad u=\frac{r'(r'+2\rho)}{(r_1+\rho)\,(r_1-\rho)}\,\frac{t'-t_0'}{t-t_0}\,,$$

formola comoda pei calcoli coi logaritmi.

Ora io dico che il valore di u così calcolato varia pochissimo anche quando tra una parte e l' altra dell' esperimento l'intensità media i_m della corrente primaria varia sensibilmente.

Supponiamo infatti che l' intensità media della corrente primaria, la quale durante la prima parte dell' esperienza, vale a dire durante la misura di $t'-t'_0$, era i_m, abbia variato tra la prima e la seconda parte dell' esperienza, ed abbia preso il valore $k\,i_m$ quando si fanno le misure di $t-t_0$ e di r_1 sul circuito primario. Vediamo come in questo caso si debba modificare la (54) acciocchè essa dia ancora il vero valore di u.

Se con una corrente di intensità media ki_m si è letta nel calorimetro una variazione di temperatura $t-t_0$, con una corrente di intensità media uguale ad i_m, quale si aveva durante la prima parte dell' esperienza, si sarebbe ottenuta evidentemente una differenza di temperatura uguale a $\frac{t-t_0}{k^2}$. E se con una corrente di intensità media ki_m è stata necessaria una resistenza $r_1=\frac{v_m}{ki_m}$ per ottenere una media caduta di potenziali v_m, sarebbe stata necessaria una resistenza $r_2=\frac{v_m}{i_m}=kr_1$ quando l'intensità media della corrente avesse avuto il valore i_m.

Da ciò si deduce che per calcolare in questo caso u colla

formola (54) bisogna in essa sostituire $\frac{t-t_0}{k^2}$ a $t-t_0$ e kr_1 ad r_1. Fatta tale sostituzione, la formola diventa

$$u = \frac{r'(r'+2\rho)}{k^2 r_1^2 - \rho^2} k^2 \frac{t'-t_0'}{t-t_0},$$

ossia

$$u = \frac{r'(r'+2\rho)}{r_1^2 - \frac{\rho^2}{k^2}} \frac{t'-t_0'}{t-t_0}. \qquad (54')$$

La quale formola dimostra che la correzione da farsi al valore (54) quando k non è uguale all' unità, si riduce a dividere per k^2 il termine ρ^2 del denominatore; e siccome negli apparecchi del Gaulard ρ è molto piccola, così la correzione è minima. Nel caso delle nostre esperienze si aveva $\rho^2 = 0{,}078$, mentre il minimo valore che si sia dato ad r_1^2 è stato $(4{,}8)^2$, ossia 23,04; quindi il termine su cui cade la correzione non era mai, nemmeno nel caso più sfavorevole, maggiore di $1/_{300}$ del totale denominatore. La correzione diventava adunque assolutamente trascurabile se, come si faceva effettivamente, si aveva cura di fare in modo che k fosse sempre, per quanto era possibile, prossimo all' unità.

Ora ecco i valori di u che si trovano portando nella formola (55) i valori di r', r_1, t, t_0, t', t'_0 ricavati dalle nostre esperienze calorimetriche:

N.° d' ordine	r'	u	δ	δ^2
1	4,70	1,03	+0,04	0,0016
2	5,09	1,00	+0,01	0,0001
3	6,10	0,98	−0,01	0,0001
4	6,80	0,99	0	0
5	7,73	1,00	+0,01	0,0001
6	10,02	1,00	+0,01	0,0001
7	10,02	0,97	−0,02	0,0004
8	12,12	1,01	+0,02	0,0004
9	15,43	1,02	+0,03	0,0009
10	17,70	0,95	−0,04	0,0016
11	17,73	0,96	−0,03	0,0009
12	19,80	1,01	+0,02	0,0004
13	21,50	1,00	+0,01	0,0001
	Media	0,99	$\Sigma\delta^2 =$	0,0067

La media dei valori di u registrati in questa tabella è

$$u = 0{,}99 . \tag{56}$$

Per vedere quale sia l'errore probabile di tale determinazione, si sono calcolate le differenze δ tra i singoli valori di u ricavati dalle esperienze e la media, ed i quadrati delle differenze stesse. La somma dei quadrati delle differenze risulta

$$\Sigma \delta^2 = 0{,}0067,$$

e quindi si deduce che l'errore medio delle singole determinazioni è

$$\sqrt{\frac{0{,}0067}{12}} = 0{,}02 ,$$

quello del medio:

$$\sqrt{\frac{0{,}0067}{12 \times 13}} = 0{,}006 ,$$

e quindi l'errore probabile del medio

$$0{,}004 .$$

Possiamo adunque conchiudere che la cifra dei centesimi, ossia la seconda cifra del valore (56) di u, è sicura (1).

Possiamo adesso calcolare i coefficienti di rendimento pratici. A quest'uopo basta calcolare i coefficienti di rendimento teorici per mezzo delle formole (36) e (37), e poi moltiplicarli per 0,99.

Ma per fare questo calcolo è necessario avere determinato prima la costante C.

(1) Circa al rapporto u del quale abbiamo così trovato un valore, importa notare che esso dipende certamente dal valore di T. Secondo alcune esperienze che io feci nel mio laboratorio per mezzo di una macchina dinamoelettrica, la quale dava solamente 5120 inversioni al minuto primo (per la quale quindi T era circa triplo di quello con cui furono eseguite le esperienze descritte nella presente Memoria), il valore di u risulterebbe sensibilmente inferiore a quello or ora trovato, e sarebbe uguale a circa 0,94. D'altra parte alcune esperienze fatte dal Gaulard nella Esposizione di Torino fanno credere che il rendimento diminuisce anche quando si fa T più piccolo di quello con cui noi abbiamo sperimentato. È probabile, che il valore di T col quale si sono fatte tutte le esperienze descritte in questa Memoria, valore che è anche quello abitualmente adoperato dal Gaulard, sia uguale o prossimo a quello a cui corrisponde il massimo effetto utile dell'apparecchio.

In causa delle variazioni di velocità della macchina dinamo-elettrica e di intensità della corrente primaria, variazioni che, come abbiamo osservato più sopra, non si poterono nelle nostre esperienze evitare completamente, la determinazione di C non si può fare, coi dati delle esperienze calorimetriche, con sicurezza uguale a quella con cui si è calcolato u. Ma si vedrà che un errore nel valore di C dà luogo ad un errore minimo nel valore dei coefficienti di rendimento μ e ν; e che quindi la circostanza notata non nuocerà alla sicurezza della determinazione del rendimento pratico del generatore secondario.

Per determinare C per mezzo dei risultati delle nostre esperienze possiamo procedere in tre modi diversi:

1.° Possiamo servirci della formola (18) la quale si può scrivere

$$u\frac{t-t_0}{t'-t_0'}=1+\frac{r'^2}{C^2},$$

e dà

(58) $$C^2=\frac{r'^2}{u\frac{t-t_0}{t'-t_0'}-1}.$$

2.° Possiamo far uso della formola (27) la quale ci dà il valore di C in funzione delle sole resistenze misurate nelle esperienze. Da tale formola si ricava infatti

$$C^2=\frac{r_1^2-\rho^2}{(r'+\rho)^2-r_1^2}\,r'^2,$$

od anche

(59) $$C^2=\frac{(r_1+\rho)(r_1-\rho)r'^2}{(r'+\rho+r_1)(r'+\rho-r_1)},$$

formola più comoda pel calcolo coi logaritmi.

3.° Possiamo finalmente adoperare la formola (28') ossia la

(28') $$C^2=r_1^2-\rho^2,$$

la quale dà il valore di C per mezzo della sola resistenza r_1 misurata nell'esperimento col circuito secondario aperto.

Le considerazioni però, che abbiamo dovuto fare sugli errori che possono essere causati dalle variazioni accidentali e talora

considerevoli che tra la prima e la seconda parte di un medesimo esperimento potevano subire l'intensità della corrente primaria e la durata T del periodo, ci fanno prevedere che le due prime maniere non possono condurre ad una determinazione sicura ed esatta del valore di C.

Inoltre la forma stessa delle formole (58) e (59) è tale che un errore di osservazione commesso nella determinazione di $\frac{t-t_0}{t'-t_0'}$ oppure di r_1 può produrre errori enormi nel valore di C. E infatti nella prima delle nostre esperienze si ha:

$$\frac{t-t_0}{t'-t_0'}=1{,}043\ ,\quad u\frac{t-t_0}{t'-t_0'}-1=0{,}032\ ;$$

il che vuol dire che un errore di $1/_{100}$ nel valore di $\frac{t-t_0}{t'-t_0'}$ produce un errore di $1/_3$ nel valore del denominatore dell'espressione di C^2 e quindi in C^2 stesso; un errore di $2/_{100}$, uguale al medio che si ebbe nelle nostre misure, produrrebbe da sè un errore in C^2 uguale a più di $2/_3$ del valore di C^2 stesso.

Se poi si differenzia la (59) rispetto ad r_1, si trova

$$\frac{d\,(C^2)}{dr_1}=2r_1r'^3\,\frac{r'+2\rho}{[(r'+\rho)^2-r_1^2]^2}\,,$$

e quindi un errore Δr_1 commesso nella determinazione di r_1 trae seco un errore $\Delta\,(C^2)$ di C^2 dato dalla

$$\Delta\,(C^2)=2r_1r'^3\,\frac{r'+2\rho}{[(r'+\rho)^2-r_1^2]^2}\,\Delta r_1\,,$$

ossia dalla

$$\frac{\Delta\,(C^2)}{C^2}=\frac{2r_1^2r'(r'+2\rho)}{(r_1^2-\rho^2)[(r'+\rho)^2-r_1^2]}\,\frac{\Delta r_1}{r_1}\,,$$

il che vuol dire che

$$\frac{\Delta\,(C^2)}{C^2}>\frac{2r'(r'+2\rho)}{(r'+\rho)^2-r_1^2}\cdot\frac{\Delta r_1}{r_1}\,.$$

Ora se si pongono in questa formola i valori

$$r'=4{,}70\ ,\quad r_1=4{,}80\ ,\quad \rho=0{,}28$$

che si avevano nella prima esperienza, se ne deduce

$$\frac{\Delta(C^2)}{C^2} > 25 \frac{\Delta r_1}{r_1} .$$

Un errore relativo di $^2/_{100}$ commesso nella misura di r_1, errore probabile nelle nostre esperienze e non superiore a quello dovuto alle variazioni accidentali della corrente primaria, trarrebbe seco come conseguenza un errore relativo maggiore di $^{50}/_{100}$ nel calcolo del valore di C^2.

La terza maniera invece, quella basata sull' uso della formola

$$(28') \qquad C^2 = r_1^2 - \rho^2 ,$$

può offrire una sicurezza molto maggiore. L' uso della formola (28') non permette di utilizzare se non i risultati di un solo esperimento, ma tale esperimento consiste nel leggere le deviazioni dell' elettrometro e dell' elettrodinamometro, mentre funziona il generatore secondario col circuito secondario aperto, e poi nel sostituire al generatore secondario, la resistenza r_1.

Trovata tale resistenza in modo che la deviazione dell' elettrometro abbia il valore primitivo, si può con un semplice giro del commutatore riprovare col generatore secondario, e così verificare in un tempo brevissimo, molte volte, la perfetta costanza della deviazione dell' elettrometro. In questo modo riesce completamente escluso il dubbio che la misura sia travisata da una accidentale variazione della intensità della corrente.

Siccome poi ρ è piccolo, così l' errore relativo nel valore di C calcolato colla (28') è approssimativamente uguale a quello che si fa nella misura di r_1, e l' errore relativo nel valore di C^2 è semplicemente doppio di questo.

Noi ci serviremo adunque di questo procedimento per determinare il valore di C, di cui abbiamo bisogno per l' uso delle nostre formole.

Portando nella (28') in luogo di ρ il valore 0,28, ed in luogo di r_1 il valore

$$r_1 = 22{,}36$$

trovato nell' esperienza n° 14 fatta col circuito secondario aperto, otteniamo:

$$(60) \qquad C^2 = 500{,}1 ;$$

ed è questo il valore di cui ci serviremo.

Merita di essere notato che tale valore differisce poco dalla media aritmetica dei valori medii calcolati grossolanamente colle formole (58) e (59); la media dei valori ottenuti colla (58) è 512, quella dei valori dati dalla (59) è 477, la media delle due medie è 494.

Bisogna poi osservare che un errore, ancorchè grande, commesso nella determinazione della costante C, introdurrebbe, in ogni caso, un errore minimo nel calcolo dei coefficienti di rendimento sì teorici che pratici. Per rimanere convinti di ciò basta osservare che facendo variare il valore di C^2 da 460 a 500, i valori del coefficiente di rendimento teorico μ calcolati colla formola (36) non variano, nei limiti delle nostre esperienze, nemmeno di un millesimo.

Siccome è assolutamente impossibile che il valore (60) di C^2 che noi abbiamo determinato per mezzo della formola (28′) sia affetto da un errore dell'ordine di grandezza della differenza fra 460 e 500, così possiamo ritenere come sicuro, che se calcoliamo i coefficienti di rendimento effettivi col moltiplicare per u i coefficienti di rendimento teorici, otteniamo risultati, dei quali l'errore relativo probabile è uguale a quello che può esistere nel medio valore di u dianzi determinato. Il procedimento è adunque veramente, come avevamo asserito, suscettibile di una grande precisione.

Nella tabella seguente raccogliamo i coefficienti di rendimento teorici ed il coefficiente di rendimento esterno pratico, effettivo calcolato nel detto modo per una serie di valori della resistenza del circuito secondario.

In tale tabella sono registrati:

Nella finca intestata r' i valori, varianti di due in due ohm da 0,28 fino a 40, della resistenza totale del circuito secondario;

Nella colonna intestata μ i valori teorici del coefficiente di rendimento totale calcolati per mezzo della formola (36);

Nella colonna intestata (ν) i valori del coefficiente di rendimento esterno pratico ed effettivo calcolato moltiplicando il coefficiente teorico ν per il numero u che abbiamo ricavato dalle esperienze.

A base dei calcoli si sono posti i dati

$$\rho = \rho' = 0{,}28$$

$$C^1 = 500\ , \qquad u = 0{,}99\,.$$

I coefficienti di rendimento teorici sono dati con tre cifre decimali collo scopo di far vedere meglio come variino tali grandezze nelle vicinanze dei loro massimi. Invece i coefficienti di rendimento pratici (ν), i quali, come il rapporto u, che ha servito a calcolarli, possono presentare un errore probabile di circa 0,004 sono dati solamente con due cifre.

Coefficienti di rendimento teorici e pratici del generatore secondario collegato in tensione.

r'	μ	ν	(ν)	r'	μ	ν	(ν)
0,28	0,500	0,000	0,00	22	0,976	0,963	0,95
2	0,876	0,753	0,74	24	0,976	0,964	0,95
4	0,933	0,867	0,86	26	0,975	0,964	0,95
6	0,956	0,911	0,90	28	0,975	0,965	0,95
8	0,962	0,928	0,92	30	0,975	0,966	0,96
10	0,967	0,940	0,93	32	0,974	0,966	0,96
12	0,971	0,948	0,94	34	0,973	0,965	0,95
14	0,973	0,954	0,94	36	0,973	0,965	0,95
16	0,974	0,957	0,95	38	0,972	0,965	0,95
18	0,975	0,959	0,95	40	0,971	0,964	9,95
20	0,975	0,961	0,95				

Nella parte teorica di questo lavoro abbiamo dimostrato che i coefficienti di rendimento totale ed esterno μ e ν hanno un valore massimo per determinati valori della resistenza r' del circuito secondario; ed abbiamo veduto che si possono calcolare tali valori della resistenza ed i valori massimi, che loro corrispondono per mezzo delle formole (36'), (36'') e (37'), (37^iv^). Ora coi risultati delle nostre esperienze possiamo trovare tali valori pel caso del generatore secondario da noi studiato.

La (36') dice che la r' che rende massimo il coefficiente di rendimento totale μ è

$$r' = C\,.$$

Per l'apparecchio sperimentato il massimo del rendimento totale corrisponde adunque alla resistenza $r' = \sqrt{500}$, ossia a

$$r' = 22,36 \; ,$$

Il valore del massimo poi è, secondo la formula (36″)

$$\mu_m = \frac{C}{C + 2\rho} \; ,$$

quindi per l'apparecchio sperimentato

$$\mu_m = \frac{22,36}{22,36 + 0,56} \; ,$$

ossia

$$\mu_m = 0,976 \; .$$

Così pure la (37′) dice che il massimo del coefficiente di rendimento esterno ν corrisponde a

$$r' = \rho' + \sqrt{\rho'^2 + \frac{\rho + \rho'}{\rho} C^2} \; ;$$

nel caso nostro adunque, nel quale si ha

$$\rho = \rho' = 0,28 \quad e \quad C^2 = 500 \; ,$$

esso corrisponde ad

$$r' = 0,28 + \sqrt{1000,08} \; ,$$

ossia ad

$$r' = 31,90 \text{ ohm.}$$

Ed il valore del massimo, che secondo la (37^{IV}) è

$$\nu_m = \frac{C}{C + 2\rho\sqrt{2}} \; ,$$

è nel caso nostro

$$\nu_m = \frac{22,36}{22,36 + 0,79} \; ,$$

ossia

$$\nu_m = 0,966 \; ,$$

Questo è il massimo teorico; il massimo pratico è

$$(\nu_m) = 0,99\,\nu_m = 0,96\ ,$$

La tabella dei valori di μ e di ν fa vedere, che per un lungo tratto, in vicinanza dei valori di r' così calcolati, i coefficienti di rendimento variano assai lentamente e si conservano praticamente sensibilmente uguali ai loro massimi rispettivi.

§ 12°. *Altra determinazione del coefficiente di rendimento pratico.*

Il metodo che abbiamo seguito nel precedente § pel calcolo dei coefficienti di rendimento è, come abbiamo dimostrato, il migliore, che, tenuto conto delle circostanze speciali, in cui vennero eseguite le nostre esperienze, e delle cause di errore che possono avere influito su di queste, si potesse seguire. Ma adesso che abbiamo determinato il valore più probabile di tali coefficienti, non è inutile vedere a quali risultati conduca l'altro metodo al quale abbiamo più sopra fatto allusione. Sarà questo un modo di controllare coll'esperienza l'esattezza della teoria.

Il procedimento al quale abbiamo fatto allusione, e che adesso vogliamo adoperare, consiste nel dedurre i valori di μ da quelli di m per mezzo della formola (44), ossia della

$$(44)\qquad \mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{r'\,m}{C}\right)^2}}\ .$$

Noi metteremo in questa formola al posto di C^2 il valore 500 che abbiamo determinato ed adoperato nel § precedente, ed al posto di r' e di m successivamente i valori registrati nella tabella del § 10. Calcolato così per ogni singola esperienza il coefficiente di rendimento totale effettivo, coefficiente che, per distinguerlo dal teorico, diremo (μ), calcoleremo per ciascun esperimento il valore teorico di μ dato dalla formola (36), ossia dalla

$$(36)\qquad \mu = \frac{r'\,C^2}{\rho\,r'^2 + (r' + \rho)\,C^2}\ ,$$

Detto μ il valore così calcolato, faremo il quoziente

$$\frac{(\mu)}{\mu} = u\ ,$$

ed avremo così per ciascun esperimento il rapporto tra il coefficiente di rendimento effettivo e quello teorico. Potremo poi fare la media dei valori di u e confrontarla con quella ottenuta col metodo migliore seguito nel paragrafo precedente.

I risultati di un tale calcolo sono registrati nella tabella seguente, nella quale la prima colonna contiene i numeri d' ordine delle esperienze, la seconda le resistenze r' del circuito secondario, la terza i coefficienti di rendimento teorici μ calcolati colla (36), la quarta i coefficienti di rendimento pratici (μ) calcolati, la quinta i rapporti $u = \frac{(\mu)}{\mu}$, la sesta le differenze δ tra i singoli valori di u e la loro media aritmetica, e la settima i quadrati δ^2 delle dette differenze.

Confronto fra i coefficienti di rendimento pratici calcolati colla (44) *ed i teorici calcolati colla* (36).

Numero delle esperienze	r'	μ	(μ)	u	δ	δ^2
1	4,70	0,94	0,96	1,02	+ 0,02	0,004
2	5,09	0,94	0,93	0,98	— 0,02	4
3	6,10	0,95	0,93	0,97	— 0,03	9
4	6,80	0,96	0,94	0,98	— 0,02	4
5	7,73	0,96	0,95	0,98	— 0,02	4
6	10,02	0,97	0,95	0,98	— 0,02	4
7	10,02	0,97	0,96	0,99	— 0,01	1
8	12,12	0,97	0,96	0,99	— 0,01	1
9	15,43	0,97	0,96	0,99	— 0,01	1
10	17,70	0,97	0,95	0,97	— 0,03	9
11	17,73	0,98	1,01	1,04	+ 0,04	16
12	19,80	0,98	1,03	1,05	+ 0,05	25
13	21,50	0,98	1,02	1,05	+ 0,05	25
$n = 13$			Media =	1,00	$\Sigma\delta^2$ =	0,0107

$$\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}} = 0{,}03 \; , \quad \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}} > 0{,}008 \; .$$

Risulterebbe adunque $u = 1$, ma con un errore probabile maggiore di 0,005. E siccome tale errore è certamente in più, così l' unica cosa che si potrebbe conchiudere da questo calcolo è che u è compreso fra 0,99 ed 1. Ma bisogna notare che nem-

meno questa conclusione sarebbe sicura. Infatti il valore elevato del medio u è dovuto alle tre ultime esperienze, sulle quali ha certamente influito qualche causa speciale di errore. Sono queste le esperienze eseguite nell' ultimo giorno, nel quale, come abbiamo fatto notare, fu impossibile evitare notevoli variazioni della intensità della corrente primaria. Le differenze δ hanno per queste tre esperienze valori molto più grandi che per tutte le altre, e siccome sono tutte tre positive, così devesi a loro se tutte le altre, tranne solo la prima, sono negative. Il fatto che la massima parte delle differenze sono negative, e che le differenze positive non sono alternate colle negative, fa pensare che il medio u, in base al quale le differenze sono state calcolate, sia risultato maggiore del vero, in causa di un errore grossolano nelle poche esperienze che han dato differenze positive.

Il valore più probabile di u risulterebbe per tal modo non uguale, ma alquanto inferiore alla media su calcolata.

Con questa osservazione la concordanza tra la conclusione che si può ricavare dal calcolo attuale con quella a cui ci ha condotto il metodo, visibilmente migliore, che abbiamo seguìto nel § precedente, apparisce più completa.

Intanto questi risultati, mentre colle divergenze che presentano, divergenze che avevamo preveduto, giustificano la scelta che abbiamo fatto del primo metodo, sono nel tempo stesso abbastanza concordanti per provare la validità pratica delle formole somministrate dalla teoria.

§ 13°. *Calcoli coi risultati delle esperienze fatte coll'elettrometro e coll' elettrodinamometro.*

Ho detto che il motivo principale per cui ho voluto eseguire esperienze nelle quali il solo apparecchio adoperato come strumento di misura fosse un calorimetro è stato il desiderio di controllare con un metodo nuovo le esperienze che altri avevano eseguite adoperando come strumenti di misura l' elettrometro di Mascart e l'elettrodinamometro di Siemens. È adunque importante che io rifaccia coi risultati di alcune delle esperienze elettrometriche del sig. Uzel i calcoli che ho fatto coi risultati delle esperienze calorimetriche.

Le esperienze del sig. Uzel che meglio conviene calcolare sono quelle relative al generatore secondario che nel quadro dei risultati delle sue misure il sig. Uzel ha denominato *grande colonna.* Questo apparato, infatti, non differiva da quello su cui io feci più tardi le misure calorimetriche, se non per avere il nucleo completamente di ferro. Interessano poi sovratutto, pel confronto che si vuole fare, le esperienze fatte colle spirali secondarie disposte in tensione, essendo questo anche il caso studiato col calorimetro.

Io prendo adunque dal quadro delle esperienze del sig. Uzel (§ 6°.) i numeri relativi alla *grande colonna collegata in tensione* e calcolo coi medesimi il rapporto u tra i coefficienti di rendimento pratici ed i coefficienti di rendimento teorici corrispondenti, servendomi della formola (55).

Per fare uso di questa formola nel calcolo delle esperienze elettrometriche bisogna osservare in primo luogo che $\frac{t'-t'_0}{t-t_0}$ rappresenta in essa il rapporto tra le medie dei quadrati delle intensità delle correnti primaria e secondaria, talchè se, come si è fatto nell'intestare le finche della tabella delle esperienze del sig. Uzel, si rappresentano con i e con i' le intensità indicate dall'elettrodinamometro, si deve porre

$$\frac{t'-t_0'}{t-t_0} = \left(\frac{i'}{i}\right)^2 .$$

Bisogna osservare in secondo luogo che se, come si è fatto nell'intestare le colonne della tabella medesima, si rappresenta con v^2 la media dei quadrati della differenza di potenziali fra i due morsetti della spirale primaria, e con v'^2 la stessa media per la spirale secondaria, si ha

$$r_1 i = v \;, \quad (r' - \rho')\, i' = v' \;.$$

Se quindi si fa $\rho = \rho'$, come è effettivamente con grandissima approssimazione, la formola (55) si può scrivere

$$(55') \qquad u = \frac{(v' + 3\,\rho\, i')\,(v' + \rho\, i')}{(v + \rho\, i)\,(v - \rho\, i)}$$

Così la formola non contiene che le grandezze registrate

nella tabella delle esperienze e si calcola inoltre comodamente coi logaritmi.

Il valore della resistenza ρ delle spirali del generatore secondario su cui il sig. Uzel ha sperimentato non è indicato nel quadro riassumente le esperienze. Ma siccome fatta astrazione dal nucleo, il generatore secondario sperimentato era del tipo e delle dimensioni di quello sul quale io feci le misure calorimetriche, e pel quale io trovai in media $\rho = 0,28$; siccome inoltre il Gaulard mi ha più volte dichiarato che la resistenza di ciascuna spirale era, in tutti i generatori di quel tipo, uguale circa ad un terzo di ohm, così non si farà certamente errore apprezzabile ponendo $\rho = \rho' = 0,30$.

Adottando questo valore di ρ, ho portato nella formola (55') i valori di v, v', i, i' registrati nella tabella delle esperienze del sig. Uzel (§ 6°), ed ho trovato i valori di u compendiati nella tabella seguente.

Per facilitare i confronti colle esperienze già discusse ho registrato nella tabella, per ciascuna esperienza, il valore della resistenza esterna $r' - \rho'$ del circuito secondario e quelli della resistenza totale r' del circuito medesimo. Ho poi indicati d'accanto ad ogni valore di u la sua differenza δ rispetto al medio, ed il quadrato δ^2 della medesima.

Rapporto tra il rendimento effettivo ed il teorico dedotto dalle esperienze elettrometriche del sig. Uzel.

r'	$r' - \rho'$	u	δ	δ^2
1,54	1,24	0,90	− 0,09	0,0081
2,30	2	0,99	0	0
4,10	3,80	0,96	− 0,03	0,0009
5,80	5,50	1,06	+ 0,07	49
7,83	7,53	1,02	+ 0,03	9
9,30	9	1,03	+ 0,04	16
10,90	10,60	0,99	0	0
12,90	12,60	0,99	0	0
$n = 8$	Medio =	0,99	$\Sigma\delta^2 =$	0,0164

$$\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}} = 0,05 \ , \quad \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}} = 0,017 \ .$$

Errore probabile del medio = 0,01.

Fatta adunque astrazione dalla grandezza degli errori probabili delle singole osservazioni e del medio, grandezze che risultano maggiori nelle esperienze elettrometriche che nelle calorimetriche, ritroviamo esattamente il risultato a cui ci avevano condotto le misure calorimetriche: *il rapporto tra i coefficienti di rendimento pratici, effettivi, ed i coefficienti di rendimento teorici è*

$$u = 0,99 \quad .$$

La maggiore grandezza dell'errore medio delle osservazioni attuali paragonata con quella degli errori delle osservazioni calorimetriche è molto probabilmente dovuta all'impiego dell'elettrodinamometro; ed è a credere che se tutte le misure si fossero fatte per mezzo dell' elettrometro l'errore medio delle singole osservazioni non sarebbe risultato maggiore di quello che si ebbe nelle misure fatte col calorimetro. L'impiego dell'elettrometro per questa specie di misure è adunque giustificato: e siccome l'uso di tale strumento riesce comodissimo e permette di fare rapidamente molte determinazioni, così esso è non solo ammessibile, ma raccomandabile.

(Continua)

SULLA FOTOGRAFIA DELLE SCINTILLE ELETTRICHE, ED IN PARTICOLARE DI QUELLE PRODOTTE NELL'ACQUA; NOTA DEL PROF. A. RIGHI.

Essendosi compiuta la costruzione d'una grande batteria di Leyda, eseguita per mio ordine, mi venne desiderio di ripetere alcune delle esperienze da me fatte in passato sulle scariche elettriche, e pubblicate in diverse successive Memorie [1]).

La detta batteria è composta di 72 grandi vasi o bicchieri cilindrici di vetro, aventi ciascuno circa 13 decimetri quadrati

(1) *Ricerche sperimentali sulle scariche elettriche.* Mem. dell'Acc. di Bologna 1876. — Id. 2. Mem. R. Accademia dei Lincei 1877. — *Descrizione ed uso d'una macchina d'Holtz* ec. Mem. dell'Acc. di Bologna 1879. — *Le ombre elettriche.* Mem. dell'Acc. di Bologna 1881. — *Spostamenti e deformazioni delle scintille* ec. Mem. dell'Acc. di Bologna 1881. — *Di alcune curiose conformazioni della scintilla.* Mem. dell'Acc. di Bologna 1881. — *Sulle figure elettriche in forma d'anelli.* Mem. dell'Acc. di Bologna 1882. — *Le ombre elettriche*, 2. Memoria. Mem. dell'Acc. di Bologna 1882.

di superficie armata su ogni faccia, ed uno spessore medio di 1^{mm}, 5 riuniti in quattro gruppi di 18. In generale le quattro batterie parziali di 18 vasi ciascuna, furono disposte in cascata, ed in tal modo, con una capacità equivalente a quella di $^{18}/_{4}$ ossia a quattro volte e mezzo la capacità di ciascuno dei bicchieri, potevansi ottenere scintille di 12 e più centimetri di lunghezza, grosse e brillantissime, senza pericolo di rotture.

Tutti i risultati da me ottenuti in precedenza con mezzi più limitati, si verificarono con queste potenti scariche, acquistando in generale maggiore evidenza.

Così si dica per esempio, dei fenomeni di *valvola elettrica*, dei cambiamenti d' aspetto e delle singolari modificazioni che l'aumento di resistenza del circuito di scarica induce nella scintilla, dei cambiamenti di forma che subiscono in vari casi le scintille ecc.

Le ombre elettriche semplici e composte, e le figure in forma d'anello possono assumere dimensioni grandissime con scariche così potenti. Infine è possibile ottenere l' immagine fotografica delle scintille anche in quei casi in cui con scariche più deboli non si avrebbe intensità luminosa sufficiente. È appunto di alcune particolarità osservate in queste immagini fotografiche che mi occuperò nella presente Nota.

La fotografia delle scintille elettriche costituisce un mezzo di ricerca che ha dato, e darà certo in seguito, risultati interessanti, poichè permette di studiare con comodità le particolarità d' un fenomeno fuggevolissimo. Le prime fotografie di scintille le feci nel 1876, ignorando allora che qualche tempo prima il Tait aveva avuto la stessa idea, come d'altronde dichiarai nella mia seconda Memoria sulle scariche.

Invece d' adoperare le lastre al collodio umido, ho adoperato ora quelle secche assai più sensibili preparate al gelatino-bromuro d' argento. Ho potuto così ottenere le immagini delle scintille anche interrompendo nel circuito delle forti resistenze, tali da far assumere alle scintille stesse i diversi *tipi* che ho distinti altra volta (2ª Memoria sulle scariche), cioè scintille bianche ordinarie (con piccole resistenze), scintille con aureola gialla (con resistenza più grande), scintille composte rosse o rosee (con resistenza anche maggiore) e scintille composte bian-

che o violette (colle più forti resistenze). È a notarsi che le scintille che danno le più deboli immagini non sono quelle ottenute colle più forti resistenze, ma bensì quelle ad aureola gialla (2° tipo). Ad ogni modo ho potuto ottenere colla fotografia in modo abbastanza distinto, tutte le figure che disegnai a memoria nella tav. II della 2. Memoria sulle scariche elettriche comprese le figure 9 ed 11, che mostrano l'azione d'una corrente d'aria sulla scintilla.

Fatte varie prove fotografiche di scintille, con circuito di piccolissima resistenza, e variando o la capacità del condensatore o il potenziale (e quindi la distanza esplosiva), ho trovato confermati i risultati già altravolta esposti, e cioè che l'area di sezione della scintilla è sensibilmente indipendente dal potenziale, a partire da una certa distanza esplosiva, che cresce quasi proporzionalmente, ma un po' meno rapidamente della capacità del condensatore, e che diminuisce assai applicando all'obbiettivo fotografico dei diaframmi con fori di più in più piccoli. Quest'ultimo fatto dipende, come spiegai altra volta, dall'essere le scintille luminose in tutto il loro volume e trasparenti per la propria luce, cosicchè nell'immagine fotografica la parte centrale è sempre più intensa e va sfumandosi verso i contorni. Per questa circostanza e per essere spesso più o meno irregolare ed incerto il limite fra scintilla ed aureola, riesce assai difficile il misurare con esattezza il diametro delle scintille. Infine ho ottenuto con speciale evidenza le immagini di quelle singolari conformazioni che assume la scintilla, quando contorna una lastra coibente o quando passa per un foro sottile, e di cui le fig. 3 ed 11 della tav. IV della Memoria citata, offrono in piccolo un esempio.

Ho fatto moltissime immagini fotografiche delle scintille prodotte nel seno dell'acqua, per mezzo di elettrodi assai lunghi circondati da robusti tubi di vetro coperti di gomma lacca, che ne lasciano libere solo le estremità.

Si possono ottenere così scintille nell'acqua di 7 od 8 centimetri di lunghezza. Bisogna però che il recipiente che contiene il liquido sia di gran robustezza, giacchè con una scintilla di appena un centimetro di lunghezza prodotta entro un gran bicchiere di vetro da pila pieno d'acqua, il vetro va in pezzi, spe-

cialmente se la scintilla si produce a piccola distanza dalle pareti, che pure possono essere grosse quattro o cinque millimetri.

Per ottenere senza pericolo lunghe scintille nell' acqua e ritrarne l'immagine fotografica, ho dovuto adoperare una robusta cassetta di legno coperta internamente di mastice, avente una finestra rettangolare in una delle pareti chiusa da una lastra grossissima di cristallo. La scintilla potevasi osservare o fotografare attraverso di questa.

Naturalmente, nel circuito di scarica devesi introdurre anche una scintilla nell'aria fra grosse palline d'ottone, senza di chè i condensatori non potrebbero caricarsi.

Le scintille nell'acqua sono rosse o rosee, se ottenute con scariche deboli, e bianchissime con forti scariche. In questo caso si possono mettere diaframmi con piccoli fori all'obbiettivo fotografico, e tuttavia si ottengono delle immagini nerissime nelle negative. Queste scintille, a differenza di quelle prodotte nell'aria, non hanno aureola, cioè una parte esterna meno brillante e più o meno distinta dalla parte centrale. Esse si presterebbero quindi meglio alla misura della loro grossezza, se al contorno non mostrassero innumerevoli diramazioni laterali, dirette perpendicolarmente all'asse della scintilla, che rassomigliano ad una specie di peluria finissima.

La causa di questa particolare conformazione, parmi debba cercarsi nella conducibilità del mezzo in cui la scintilla si produce. È noto che se ad un filo percorso dalla scarica si accosta un conduttore, scocca fra questo ed il filo una scintilla, che è dovuta a *scarica laterale* (v. la 2ª Mem. citata).

Secondo me quelle innumerevoli scintillette brevissime e finissime che partono dalla scintilla principale e si dirigono normalmente ad essa, hanno un'origine analoga.

Spesso le scintille nell'acqua sono biforcate, o anche suddivise in più di due rami. Sembra che, come colle scintille biforcate nell'aria, la somma delle aree di sezione dei rami secondari, eguagli l'area della scintilla intera.

Se la scintilla nell'aria, che si produce nel circuito simultaneamente con quella nell'acqua, non ha una lunghezza sufficiente, in rapporto alla distanza degli elettrodi che sono immersi nell'acqua, cessa di prodursi fra questi la scintilla. Ma allora mo-

stransi su di essi delle apparenze luminose, analoghe al fiocco ed alla stelletta che veggonsi sulle punte nell'aria, e che ho descritte nella Memoria più volte citata e delineate nella tav. III annessa alla medesima.

Colle scariche deboli che allora adoperavo, le diramazioni poco numerose, ma lunghe e contorte a guisa di serpentelli, che si formavano sull'elettrodo positivo, erano rosse o rosee. Ora invece con scariche più energiche sono bianche e brillanti, e tanto numerose, da dare al fenomeno l'aspetto di un fiocco luminoso. Così pure le diramazioni negative son bianche con forti scariche, ma si distinguono sempre dalle positive, per essere formate da filetti luminosi assai più corti, sottili, numerosi, e meno contorti.

Onde le diramazioni positive riescano molto ricche e sviluppate, devesi porre l'elettrodo negativo in comunicazione con un'ampia lastra metallica immersa nell'acqua, la quale ha per iscopo di diminuire la resistenza che l'acqua introduce nel circuito di scarica. Studiando attentamente le immagini fotografiche del fiocco positivo, ho potuto constatare che si produce un curioso fenomeno d'assorbimento luminoso.

I filetti luminosi che formano il fiocco, partono da uno a più punti (in generale 2 o 3) dell'elettrodo, e si proiettano in ogni direzione, disegnando linee sinuose. Alcuni si veggono affatto neri nella negativa fotografica; altri sono più o meno pallidi. In molti punti dell'immagine i rami s'intersecano per ragione di prospettiva, coprendosi in parte reciprocamente, visti dall'obbiettivo fotografico. Osservando questi punti d'intersezione m'accorsi che in molti casi in cui un ramo pallido ne intersecava uno intenso, quest'ultimo nel punto d'intersezione era pallido esso pure. Pensai subito che la causa di questo fatto fosse un assorbimento operato da ramo più pallido, probabilmente quindi formato da materia gassosa a temperatura relativamente bassa, sulla luce emanata dal ramo più brillante, formato da materia a temperatura più elevata, precisamente come in una nota esperienza una piccola fiamma con sodio sembra nera osservata che sia contro una gamba più calda. Ma per essere di ciò sicuro, feci le esperienze seguenti.

Dapprima adoperai due elettrodi positivi fra i quali la scarica si bipartiva, disposti in modo che il fiocco dell'uno si tro-

vasse davanti a quello dell'altro, per rapporto all'obbiettivo fotografico. Osservando le negative fotografiche vidi che effettivamente il fenomeno d'assorbimento luminoso si produceva là dove un ramo pallido del fiocco posto davanti, intersecava un ramo più brillante del fiocco più lontano, ciò che conferma pienamente la spiegazione data. Alcuni rami del fiocco lontano mostraronsi in molti casi interrotti da rami appena visibili, o anche invisibili affatto del fiocco anteriore.

Feci in seguito altre prove con un solo elettrodo positivo, ma con un obbiettivo fotografico doppio, vale a dire con una macchina da vedute stereoscopiche. In ciascuna coppia d'immagini vedevansi le solite intersezioni di rami. Ma guardandole collo stereoscopio (dopo avere tagliata in due parti ogni negativa e cangiato di posto alle due immagini, come deve farsi per avere il rilievo esatto e non pseudoscopico), vidi chiaramente che dove un ramo pallido attraversava prospetticamente un ramo più lontano ed intenso, quest'ultimo era in quel punto dell'immagine reso più pallido; cioè nell'atto in cui la fotografia si produsse, la luce emessa dal ramo lontano fu in parte assorbita nell'attraversare il ramo più vicino.

I vari rami dei fiocchi positivi nell'acqua sono dunque verosimilmente costituiti tutti dai medesimi gas incandescenti, ma a temperature differenti, e così possono dar origine al fenomeno d'assorbimento descritto. Ciò non avviene colle scintille nell'aria, le quali, come altra volta dimostrai, sono trasparenti per la propria luce.

M'è mancato il tempo per studiare in modo simile le scariche in liquidi diversi dall'acqua, ma ciò farò forse in seguito.



NUOVE RICERCHE SUL FENOMENO DI *KERR*; NOTA PREVENTIVA DEL PROF. A. RIGHI.

Nella Memoria avente per titolo: *Ricerche sperimentali e teoriche intorno alla riflessione della luce polarizzata sul polo d'una calamita* [1]) ho esposti i risultati dei miei primi studi sul

1) *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, 1885 — *Ann. de Ch. et Phys.* 1885.

sul fenomeno di Kerr, secondo i quali, quando si abbia cura di rendere uniforme la magnetizzazione dello specchio d'acciaio che collocato sul polo riflette la luce polarizzata, questa subisce speciali modificazioni nella forma delle sue vibrazioni, che solo in qualche caso particolare corrispondono a quelle che furono indicate dal Kerr e dal Fitzgerald. Ho esposto inoltre una nuova teoria la quale rende conto completo dei fenomeni da me constatati, e particolarmente della reciprocità da me trovata negli effetti che si ottengono girando o il polarizzatore o l'analizzatore a partire dall'estinzione, e da quelle orientazioni del polarizzatore che forniscono vibrazioni o perpendicolari o parallele al piano di incidenza.

Ho continuato in seguito ad occuparmi del fenomeno di Kerr, studiando in particolare i casi nei quali le vibrazioni riflesse restano rettilinee. Risulta infatti dalla mia teoria, che ad eccezione di quando il raggio che cade sul polo faccia un piccolo angolo d'incidenza, esistono per tutte le incidenze maggiori fino a 90°, due orientazioni particolari delle vibrazioni sul raggio incidente, per le quali il raggio riflesso possiede pure la polarizzazione piana. Queste due orientazioni sono tali che per l'una le vibrazioni incidenti fanno un piccolo angolo col piano d'incidenza, e per l'altra un piccolo angolo colla perpendicolare al medesimo piano.

Si arriva praticamente ad ottenere queste speciali orientazioni nel modo seguente. Si dispone il polarizzatore in modo da dare vibrazioni all'incirca parallele o perpendicolari al piano d'incidenza, e l'analizzatore in modo da dare presso a poco l'estinzione. Lanciata la corrente nella elettrocalamita, si girano alternativamente il polarizzatore e l'analizzatore in modo da rendere ogni volta minima la luce trasmessa. Si giunge così ben presto ad avere nuovamente l'estinzione, o per meglio dire, a collocare i nicol in tal posizione, che la debolissima luce trasmessa (principalmente dovuta a diffusione o ad imperfezioni dei nicol) si accresca al più piccolo spostamento d'uno qualunque dei nicol in qualunque senso.

Coll'inversione della corrente si otterrà una nuova posizione analoga dei nicol, e se essi sono mobili al centro di circoli graduati, si otterranno così simultaneamente, 1° le orientazioni delle

vibrazioni incidenti che forniscono vibrazioni riflesse rettilinee; 2° l'orientazione di queste; 3° la posizione esatta del polarizzatore, che fornisce vibrazioni o parallele o perpendicolari al piano d'incidenza, e quella corrispondente dell'analizzatore la quale, se lo specchio non fosse magnetizzato, darebbe l'estinzione, le quali posizioni si trovano mettendo ciascuno dei nicol nella posizione media fra quelle che ebbe prima colla corrente in un senso e poi colla corrente in senso contrario.

Le esperienze numerosissime da me fatte con disposizioni anche più perfette di quelle descritte nella Memoria citata, confermano esattamente le varie particolarità che la teoria faceva pronosticare.

Inoltre, la determinazione delle orientazioni suddette, unita a quella delle rotazioni dei due nicol capaci di rendere minima la luce trasmessa dall'analizzatore, hanno fornito il modo di calcolare per le varie incidenze le costanti introdotte dalla teoria, e cioè il rapporto degli assi delle vibrazioni elittiche in cui si suppone decomporsi la vibrazione incidente, il rapporto delle ampiezze delle medesime, e la loro differenza di fase.

Ho pure studiato in modo più completo la speciale dispersione che ha luogo nella riflessione sul polo d'una calamita. Come annunciai nella citata Memoria, e come riconobbe il Kundt [1]), ho trovato che questa dispersione è anormale, vale a dire che gli effetti diminuiscono al crescere della rifrangibilità della luce adoperata.

L'esposizione dettagliata delle mie nuove ricerche, di cui qui non ho dato che un breve ed incompleto cenno, sarà fatta in una Memoria nel venturo anno accademico.



(1) *Wied. Ann.* 1884, n. 10.

RIVISTA

Comptes Rendus, 1885, 1° Semestre.

6. — K. Olszewki — *Temperatura di solidificazione dell'azoto e del protossido di azoto, e relazione fra la temperatura e la pressione dell' ossigeno liquido.* — L' A. ha migliorato l'apparecchio del quale si servì nelle esperienze più volte indicate in questi sunti. Alla pressione di 60 millimetri di mercurio l'azoto comincia a solidificarsi, producendo uno strato superficiale opaco, ed a — 214°. Tale è il punto di solidificazione dell'azoto, e la pressione di 35 mill. con la temperatura di — 146° ne definiscono il punto critico. Al disotto di 60 mill. l'azoto si solidifica totalmente come neve. Alla pressione di 4 mill. il termometro a idrogene, il di cui bulbo era immerso nell'azoto, segnava — 225°.

A 100 mill. di pressione, l'ossido di carbonio comincia a solidificarsi, alla temperatura di — 207°. Allora abbassando la pressione si abbassa anche la temperatura, ed a — 211° l' ossido di carbonio si solidifica totalmente come neve. La pressione di 100 mill. e la temperatura di — 207° definiscono il punto di solidificazione del protossido di carbonio.

Per l'ossigene l'A. presenta una tavola numerica, dalla quale si deduce che alla pressione di 9 mill. ed alla temperatura di — 211 l' ossigene rimane liquido; e lo era ancora a 4 mill. di pressione, ma l' A. non potè misurare la temperatura, perchè il bulbo del termometro era solo in parte immerso nel liquido.

7. 8. — L. F. Menabrea (Generale). — *Sulla densità e sulla figura della terra* — Le belle ricerche di Cornu e di Baille eccitarono l'A. ad occuparsi di tal quistione. La nota dell'A. comincia con un sunto di dati storici esperimentali, dai quali risulta esser quella densità compresa fra 5,40 e 5,60; e Newton la credeva compresa fra 5 e 6. Già nel 1839 (*Mem. dell'Accad. di Torino,* T. 2, serie 2ª) l' A. pubblicò una formula generale, ove si tien conto di alcune attrazioni che nelle esperienze di Cavendish agiscono sulla bilancia di torsione, e che furono trascurate da quel fisico; per modo che quelle esperienze invece di 5,48 conducono realmente ad un valore più forte, che è 5,58, secondo quella formula.

Ora l'A. ha studiata analiticamente, tenendo conto della resistenza dell'aria, la nota regola del Cavendish, che fu adottata dal Bailly, per la posizione media di equilibrio del giogo della bilancia di torsione, e trovò giusta quella regola.

Per conoscere la influenza della forma della terra e della distribuzion della densità su quella misura, l' A. trattò il problema dell'attrazione delle elissoidi ad assi ineguali, ed a strati concentrici a densità diverse; ma come pareva probabile, il piccolo schiacciamento della terra non ha sensibile influenza sul calcolo della densità, nei limiti d'esattezza nelle esperienze.

L' A. termina la sua Nota con alcune considerazioni generali, esprimendo la sua fiducia sulle esperienze ora in corso, del Cornu e del Baille; ma fa però osservare che in diversi luoghi della terra si verificano delle singolari anomalie nel movimento del pendolo, che inducono a credere non esser la terra composta di strati sferici di densità uguali ciascuno; per la qual cosa sarebbero necessarie delle ricerche che completassero quelle dei due nominati esperimentatori.

9. — J. Raynaud — *Mezzo per diminuire o togliere i danni dell' extracorrente nelle macchine dinamoelettriche, nel caso di rottura del circuito.* — Il D'Arsonval propose già all' Accademia di intercalare una batteria di polarizzazione fra i poli della macchina; ed ora l' A. propone per lo stesso scopo, per togliere il danno dell'extracorrente, di servirsi degli apparecchi che servono come parafulmini negli uffici telegrafici onde preservare gli apparecchi dalle scariche atmosferiche.

E. - H. Amagat — *Sulla densità e sul volume atomico dei gas, e particolarmente dell' ossigene e dell' idrogene* — Le ricerche di Cailletet, Hautefeuille, Pictet e Wroblewski, fatte in condizioni diverse, diedero per la densità dell' ossigene liquido un valore di poco inferiore all' unità, per la qual cosa fu creduto che quel valore diverrebbe uguale all' unità sotto ad una assai forte pressione, o ad una temperatura assai bassa; e così allora il quoziente del peso atomico per la densità, ossia il volume atomico, sarebbe lo stesso che pel solfo, pel selenio, pel tellurio....

L' A. dimostrò già che a temperature sufficientemente alte la pressione dei gas segue la legge data dalla formula $p\,(v-\alpha) = \text{cost.}$ la quale dà il volume limite α quando p è infinita, e per conseguenza la densità limite. E dimostrò inoltre che a temperature meno alte, le linee che danno quella legge di compressibilità, sono, partendo da una sufficiente pressione, curve delle quali una parte, essendo sensibilmente rettilinea, permette di calcolare quel volume limite (*Ann. de Chim. et de Phy.* 1881).

Si tratta dunque di operare a pressioni convenienti per determinare nella curva relativa ad un dato gas, la direzione della parte rettilinea. Per l' ossigene e per l' azoto conviene ricorrere a pressioni molto più forti delle usate fin quì. Nell' apparecchio dell' A. si raggiunsero 4000 atm., ma due accidenti impedirono

di ottenere dati numerici esatti. Però alla pressione più forte che potè ottenere dall'apparecchio l'A. ottenne per l'ossigene una densità maggiore di 1,25 e alla temperatura ambiente 17°. Per l'idrogeno la densità limite è 0,12, secondo le esperienze dell'Autore.

Uno di quei due accidenti fu, che ad una pressione circa di 4000 atmosfere, il mercurio del manometro a gas fu lanciato attraverso i pori delle pareti, grosse di otto centimetri di un cilindro di acciaio, stridendo e formando una pioggia di mercurio. Dopo non si potè con la lente scorgere alcun difetto in quel cilindro. La stessa pressione non fece passare alcuna goccia dal cilindro, quando invece di mercurio vi era acqua o glicerina.

In un altro simile apparecchio, il cilindro d'acciaio scoppiò violentemente.

10. — Ch. - V. Zenger. *Studi spettroscopici.* — Essendo molto difficile l'osservare con lo spettroscopio delle protuberanze assai estese, l'A. propone il modo di scacciare dal campo visuale dello spettroscopio a visione diretta tutti i raggi fuor quelli vicini alla stria C, onde osservare col paralellepipedo di dispersione le protuberanze, alla luce rosso monocromatica dell'idrogene.

Quel modo consiste nella opportuna selezione dei mezzi rifrangenti e dell'angolo refrangente di due prismi costituenti il paralellepipedo di dispersione; ma la sua descrizione non è sufficientemente breve, nè potrebbe farsene un chiaro sunto.

A. D'Arsonval. *Sul parafulmine a polarizzazione.* — L'A. dice esser mal fondata una reclamazione di priorità, che gli fu mossa da U. Daussin. Si tratta dello stesso soggetto della Nota quì sopra indicata, di J. Raynaud. L'A. dice che la disposizione del Daussin funziona come una vera e propria *derivazione*, che assorbe inutilmente una parte della corrente della macchina dinamoelettrica. L'A. fa uso di una pila fatta con una vasca, o recipiente, rettangolare, che è divisa in tanti scompartimenti da lamine di piombo, delle quali una faccia resta positiva e l'altra negativa. Il liquido è acqua acidula. La corrente della dinamo genera nella pila una forza elettromotrice che presto la equilibra, onde quella corrente si crea da sè con ostacolo per passare nella pila di derivazione, e si evita il danno dell'extracorrente di apertura del circuito.

H. Pellat. *Studio dei modi per determinare il potenziale ...ria, e la forza elettromotrice di combustione.* — Fu adottato l'elettrometro a quadranti del modello Mascart. Nell'interno della stanza stava una grande lamina metallica, a zero posta od a 100 volta, all'oggetto di far variare il potenziale ambiente. I quadranti erano a + 50 ed a — 50 volta.

All'A. risultò che gli apparecchi a scolo di acqua impiegano lungo tempo a porre l'ago al potenziale dell'aria; e non val meglio il sostituire a quegli apparecchi la combustione di carta a filtro impregnata da azotato di piombo. L'A. consiglia, come *presa di potenziale*, la fiamma a gas di un becco metallico isolato e comunicante con l'elettrometro; e questo gli fornì l'occasione per lo studio della forza elettromotrice di combustione del gas. Il becco stava entro un inviluppo cilindrico e metallico, chiuso in alto da un coperchio con fori, e dove rimaneva attivata una sufficiente corrente di aria. È una specie di elemento di pila. Un filo a contatto con l'inviluppo cilindrico, ed un altro filo saldato al becco, presentano la differenza di potenziale a studiarsi, e che dipende dalla natura del gas, da quella del metallo del becco, e da quella della superficie interna dell'inviluppo. Era negativo l'inviluppo, e positivo il becco. L'A. presenta alcuni numeri, avendo variati i metalli dell'inviluppo e del becco. Il gas di illuminazione dà maggior forza elettromotrice che l'idrogeno. Una fiamma lunga circa un centimetro, di un becco metallico isolato, è il miglior modo per aver il potenziale di una massa di aria.

11. — E. Bichat *ed* R. Blondlot. *Sulle differenze elettriche fra i liquidi, e sull'ufficio dell' aria nelle misure elettrometriche.* — I principi della conservazione della elettricità e della conservazione della energia, enunciati dal Lippmann, condussero a due equazioni relative alle proprietà della superficie di contatto fra il mercurio ed un elettrolite; ed Helmohltz osservò che se mediante una conveniente polarizzazione, la costante capillare di quella superficie prende il suo valor massimo, il mercurio e l'elettrolite sono allo stesso potenziale. Questo teorema fornisce il metodo per la misura della differenza elettrica fra i due liquidi. Si pone nell'elettrometro capillare il dato elettrolite invece dell' acqua acidula, e poi si intercala in quell' istrumento una forza elettromotrice tale da ottenere la massima altezza del menisco nel tubo capillare, e allora, secondo quel teorema, essendo zero la differenza elettrica fra i due liquidi in quella superficie, quella forza elettromotrice sarà la quantità necessaria, per condurre quella differenza elettrica dal suo valor normale a zero, ossia sarà uguale a quel valore normale.

Gli Autori hanno potuto far quella misura per un certo numero di liquidi; ma per altri, o il menisco non era mobile, o si avea elettrolisi prima di raggiungere la massima altezza. Ecco la disposizione dell' apparecchio. Un primo vaso ha mercurio e, sopra a questo ultimo, l'elettrolite L; e un secondo vaso ha parimente mercurio con sopra l'elettrolite L'. I due vasi sono riu-

niti da un sifone pieno dell' uno o dell' altro liquido e munito di un diaframma. La forza elettromotrice di tal specie di pila è la somma delle differenze seguenti: Mercurio / L, L' / L, L' / Mercurio. La prima e la terza si ottengono col metodo indicato quì sopra, e basta sottrarle dalla forza elettromotrice di quella pila misurata coi metodi ordinari, per ottenere la differenza cercata, L / L'.

Gli Autori osservano che il loro metodo ha ciò di particolare, che l' aria non ha alcuna influenza su quelle misure. Maxwell osservò che probabilmente con tutti gli altri metodi analoghi a quelli del Volta quella influenza dell' aria viziava le misure, non ottenendosi che la somma algebrica di tre differenze elettriche, l'una delle quali è la cercata, e le altre sono le differenze fra l'aria ed ognuno dei due corpi. Infatti gli Autori ottennero con il loro ultimo metodo dei valori differenti da quelli che ottenner già con un altro metodo (*Comptes Ren.*, 1883 *Journal de Phy.* 1883); e il disaccordo fra i due metodi può andar fino al cangiamento di segno.

A. Gaiffe. *Sopra i galvanometri a telaio curvilineo.* — Nel 26 settembre 1881 l'A. presentò all'Accademia un galvanometro ad uso medico, diviso in milliampere, ove il telaio ha una forma elittica, tale che le deviazioni sono proporzionali alle intensità delle correnti, fino a circa 35°. Ora egli ha modificata quella forma primitiva ed ha ottenuto quella proporzionalità fino a verso 70°.

12. — J. Carpentier. *Pila a circolazione di liquido.* — È a bicromato. Immaginiamo un sifone le di cui due branche, ineguali, tuffino nello stesso vaso contenente il liquido; l' una stando vicina alla superficie e l' altra vicina al fondo. Entro la branca più lunga stiano gli elettrodi di una coppia zinco e carbone. Se il liquido resta omogeneo non vi ha moto nel sifone; ma se quella coppia agisce, lo zinco si scioglie aumentando la densità del liquido che lo bagna, onde il liquido circola nel sifone proporzionalmente alla intensità della corrente. Il liquido carico di zinco si deposita al fondo, e l'altro ascendendo lo rimpiazza.

Nella pila dell' A. il carbone è un tubo entro al quale sta un cilindro di zinco, e forma la branca lunga del sifone. La branca più corta è formata dallo spazio anulare compreso fra il carbone ed un tubo inviluppante di vetro. La comunicazione fra le due branche è fatta da buchi nella parte superiore del carbone.

H. Deslandres. *Relazioni fra lo spettro ultra violetto del vapor d'acqua, e le liste (bandes) telluriche* A, B, *α dello spettro solare.* — Come è noto il vapore di acqua dà uno spettro di emissione che nella regione ultra violetta contiene delle liste

(*bandes*) che terminano, bruscamente in linea retta dal lato più refrangibile, mentre sono sfumate dal lato opposto. La prima di queste liste fu scoperta da Huggins, Liveing, e Dewar e la seconda da Liveing e Dewar. L' A. ne ha scoperta una terza più refrangibile delle due prime, molto debole, e la di cui lunghezza di onda, nella stria netta che la termina da un lato, è circa di 261, 05. Queste liste (*bandes*) hanno una struttura analoga a quella delle A, B, *a* dello spettro solare; e secondo le esperienze di Egoroff, sarebber dovute all' assorbimento dell' ossigeno. Per queste variazioni l'A. intraprese lo studio dello spettro del vapor d' acqua.

L' A. fa dei resultati ottenuti da lui una narrazione dettagliata che qui non potremmo utilmente riferire in sunto. Le Note inserite nei *Conti resi* sono spesso dei sunti dai quali non è possibile trarne altri sunti sufficientemente chiari. Ci limiteremo dunque a dire che la prima di quelle sopra dette liste comprende una serie di strie che riproducono linea per linea, con le stesse distanze e le stesse intensità relative, la A tellurica. La seconda lista del vapor d'acqua comprende, nel medesimo modo, la B; ed infine la terza comprende la *a*, ma poco sviluppata.

Lo spettro del vapor d' acqua incandescente ha delle liste simili a quelle di assorbimento dell'ossigene a basse temperature. L' A. ritornerà fra poco su questo soggetto, completando i resultati e deducendone importanti conseguenze.

13. — L. Laurent. *Sopra un apparecchio destinato a verificare la curvatura delle superfici e la refrazione delle lenti.* — L' Autore presentò già all' Accademia, degli apparecchi per verificare otticamente le superfici piane. L'apparecchio attuale è relativamente semplice e non potrà costar molto. Esso è in sostanza un *focometro* di precisione che conviene per tutte le superfici curve, e col quale si può a colpo d'occhio giudicare della qualità di un sistema ottico. Ma per descriverlo utilmente dovremmo impiegare diverse pagine con molte figure.

A. Crova. *Sulle osservazioni actinometriche del 1884 nell' Osservatorio della Scuola di Agricoltura a Montpellier.* — Dall tavole numeriche si hanno i seguenti resultati. La intensità calorifica media nell'estate del 1884, rimase inferiore a quella dell altre stagioni, e fu massima nella primavera. Si ebbero, com al solito, due massimi e due minimi annuali, ma in epoche u poco diverse da quelle del 1883. La intensità media mensil della radiazione aumentò fino ad Aprile, ove nel dì 11 la radiazione raggiunse il massimo, che fu in calorie 1,20. Quindi diminuì e poi aumentò; e nel 30 Giugno la radiazione ebbe il mas

simo dell'annata, che fu 1,42. In seguito andò diminuendo. ma ebbe un aumento passeggiero nei primi di Autunno, innalzandosi ad 1,12 nel 17 di Ottobre. Si ebber due minimi mensili: nel Febbraio 0,93 e nel Novembre 0,87. La media annuale delle intensità calorifiche fu nel 1884 una frazione uguale a 0,89 di quella del 1883; ed il numero totale delle ore di insolazione fu, nel 1884, 0,819 di quello del 1883.

14. — K. Olszewski. *Liquefazione e solidificazione del formene e del deutossido di azoto.* — L'A. presenta una tavola numerica che va da 54,9 atmosfere, con —81°,8 di temperatura, fino alla pressione di 5 mill. di mercurio, con —201°,5 di temperatura. Alla pressione di 80 mill. e temp. —185°,8 è il punto critico, e il formene liquido comincia a congelarsi. Abbassando ancora la pressione il formene forma una massa bianca come neve.

Per il deutossido di azoto l'A. presenta altri simili resultati numerici. Il punto critico è alla pressione di atm. 71,2 e a — 93°,5; e il punto di solidificazione è alla pressione di 138 mm. per la temperatura —167°,0.

Il Cailletet osservò che egli fu il primo a far conoscere i metodi per la liquefazione dell'etilene e del formene, così come l'uso di questi gas per liquefar l'ossigene ed altri gas e che, tutti i metodi conosciuti per preparar l'etilene ed il formene non essendo tali da fornire puri questi gas, egli si astenne dal pubblicare le relative determinazioni numeriche da lui ottenute.

15. — M. Gouy. *Sulla diffrazione della luce per un diaframma a contorno rettilineo* — L'A. descrisse già il suo metodo esperimentale nei *Conti resi* dell'anno scorso. Lo scherma o diaframma stava dentro un vaso prismatico pieno di un liquido trasparente. I raggi incidenti vi entravano normalmente, e pure normalmente ne escivano quei raggi diffratti che erano studiati. Il liquido era alcool, oppure alcool, o cloroformio o solfuro di carbonio. I fenomeni sono naturalmente simili a quelli pel caso comune dell'aria; ma vi si osserva che «l'aumento dell'indice di refrazione del mezzo ambiente ha la stessa influenza che apparterrebbe ad un aumento nella grossezza del bordo dello scherma». L'acciaio ed il platino, pei quali l'aumento di grossezza non avrebbe influenza sensibile, restan pure indifferenti al cangiamento del mezzo.

La luce naturale diffratta all'esterno dell'ombra geometrica si polarizza normalmente ai bordi dello scherma, come già fu scoperto dall'A; ma tal polarizzazione è più forte di quella ottenibile dalla sola riflessione metallica, onde non può esserle attribuita. Dunque conviene ammettere che la diffrazione esterna

all'ombra geometrica polarizzi la luce normalmente ai bordi dello scherma, producendo un effetto complementario a quello della diffrazione interna; poichè nella diffrazione interna la polarizzazione è paralella ai medesimi bordi.

Le teorie della polarizzazione per diffrazione, di Stoke, di Eisenlohr e di altri, sono in contraddizione coi fenomeni osservati in queste ricerche, nelle quali è manifesta la influenza dei bordi dello scherma, influenza della quale quelle teorie non tennero conto. Così in virtù di un ignoto meccanismo le vibrazioni polarizzate normalmente ai bordi sono respinte fuori dell'ombra geometrica, ed il contrario accade per le vibrazioni paralelle ai bordi.

S. Wroblewski. *Sui gas permanenti evaporati nel vuoto, sul termometro a idrogene, e sulla temperatura per l'espansione dell' idrogene liquido* — L'A. afferma che l'impiego del termometro a idrogene è illusorio, quando la sua temperatura è tale che quel gas più non segue le leggi di Gay-Lussac e di Mariotte. L'A. osservò che la equazione che esprime la relazione fra la forza elettromotrice di una pila termoelettrica di rame ed argentana e la temperatura, è esattissima fra 100 e —193°, per cui allora tal pila, che fu calibrata fra 100 e —130°, rimpiazza il termometro a idrogene, ed è naturale che si possa adoperare esattamente a temperature non troppo inferiori a —193°. Ma allora, a partire da —193°, il termometro a idrogene indica temperature più basse di quelle della pila; il che mostra che l'idrogene più non segue quelle leggi, onde non deve più essere adoperato l'idrogene come corpo termometrico. Furono indicate nei *Comptes rendus* le temperature di —207° e di —214 per le temperature di solidificazione dell'ossido di carbonio e dell'azoto; mentre la detta pila indica respettivamente —199° e — 203° per quelle temperature. Tutti i numeri per le evaporazioni dei gas permanenti nel vuoto, e pubblicati nei *Comptes rendus* sono inferiori al vero secondo l' A., il quale presenta più tavole numeriche per l'ossigene, l'azoto e l'ossido di carbonio. Per l'aria l'A. osserva che i suoi componenti non seguono le stesse leggi, per la loro liquefazione. Tali sono le principali osservazioni dell'A.

F. M. Raoult. *Influenza della diluizione sul coefficiente di abbassamento del punto di congelazione dei corpi sciolti nell'acqua.* — Come si sa, quel coefficiente è il rapporto fra quell'abbassamento C e il peso P della sostanza sciolta in 100 gr. di acqua, e fu già studiato da Rudorff e da Coppet per le soluzioni saline. L'A. lo ha studiato per gli acidi, le basi e le sostanze organiche, rappresentando i resultati con delle curve, che gli risultarono assai semplici, senza sinuosità, e somiglianti ad archi

di iperbole, con la convessità rivolta verso l'asse delle ascisse, le quali rappresentino C mentre le ordinate rappresentano il rapporto di C a P. A misura che la curva si allontana dall'asse delle ordinate, essa tende sempre più a diventar rettilinea; e in generale questa ultima parte della curva differisce pochissimo da una retta quando il punto di congelazione è minore di $-2°$, o quando la soluzione contiene più di una molecola, della materia sciolta, in due litri di acqua. L'A. si diffonde con molte considerazioni relative a diversi casi, dalle quali conclude che tutti i corpi si decompongono più o meno nelle soluzioni molto diluite; e che non soltanto i sali possono così decomporsi in un grande eccesso di acqua, ma bensì ancora l'acido solforico, l'alcool, l'acido tartarico e lo zucchero, vi subiscono, bensì in minor grado, un principio di dissociazione.

C. Decharme. *Sulle forme vibratorie delle lamine quadrate.* — Per le disposizioni esperimentali l'A. rinvia ai *Conti resi* t. LXXXVII ove è una sua Nota sulle lamine circolari. Siccome ora non potremmo aver sott'occhio quella prima Nota che par necessaria per far chiaramente il sunto della Nota presente, così ci riserbiamo a riferir poi su quest'ultima.

MM. Clamond e J. Carpentier. *Nuova disposizione di una pila termoelettrica.* — È composta di lamine di ferro, o di nichelio, e di sbarre di lega antimonio e zinco, lega che ha come disse il Becquerel, il massimo potere termoelettrico quando è fatta nel rapporto degli equivalenti dei due metalli; e variando anche di poco quel rapporto varia molto quel potere. Il massimo di quel potere è alla temperatura di fusione ed è di $^1/_{10}$ volt per coppie ferro e lega, e di $^1/_8$ volt per coppie nichelio e lega. Per non raggiungere il limite di fusione, l'apparecchio di riscaldamento è opportunamente disposto. Gli Autori danno alcuni dettagli sul modo di fondere le coppie, montare e smontare la pila.

A. Dupré. *Sopra una pila a due liquidi.* — L'A. ha potuto sopprimere lo sviluppo dei vapori nitrosi nella pila Bunsen. Il liquido depolarizzante è composto da 75 grammi di bicromato di potassa sciolti in un litro di acido nitrico. Lo zinco può stare come al solito di una soluzione di acido solforico, di bisolfato ecc. Un elemento Bunsen (zinco, diam. $0^m,08$ altezza immersa $0^m,12$) con 650 cent. cubi di acqua salata, e 350 di liquido depolarizzante, lavorò senza notevole perdita, per 15 ore, dando da 8 a 9 ampère e circa due volt. La forza elettromotrice varia con la concentrazione dell'acido. Per economia, si fa il liquido depolarizzante sciogliendo 510 gr. di nitrato di piombo in 600 di acqua con 400 di acido solforico, e 60 gr. di bicromato di potassa.

16, 17 e 18. — M. Deprez. *Sulla regolarizzazione della velocità dei motori elettrici.* — L'A. diede anni sono (*Conti resi t.* xciii. p. 892 e 952) un metodo per ottenere quella regolarizzazione, metodo che fu adottato da molti costruttori nelle macchine *compound*; ma egli indicò teoricamente che per tal metodo era indispensabile che la velocità della macchina avesse un certo dato valore determinato; ed ora annunzia che le esperienze confermarono le sue previsioni teoriche. È noto che quel metodo consiste nel munire l'induttore della macchina di due distinti avvolgimenti (*enroulments*) di filo, percorsi nello stesso senso, l'uno da una corrente costante, e l'altro da una corrente che varia automaticamente col numero degli apparecchi che si fanno funzionare. L'A. nella sua Nota nel N° 17 dei *Conti resi*, e in quella del N° 18, considera una macchina *compound* nel caso in cui essa diviene ricettrice in luogo di generatrice, trattandovi alcune questioni particolari. Ma ambedue queste Note non sono sufficientemente brevi per tradurle quì e neppur sono suscettibili di un sunto.

A. D'Arsonval. *Sulla soppressione dei vapori nitrosi della pila Bunsen*, e sopra *una nuova pila depolarizzantesi per mezzo dell'aria.* — L'A. rammenta che Ruhmkorff consigliò già di filtrare l'acido nitrico su cristalli di bicromato di potassa; e questo dà per le prime ore e quando la corrente non è molto forte un buon resultato, ma dopo i vapori nitrosi ritornano. Fin che vi è acido cromico questo ossida i vapori nitrosi, fino a che egli è trasformato in azotato di cromo, e dopo la pila rimane come montata ad acido azotico diluito. Dopo alcune considerazioni sulla economia della Bunsen nella pratica, l'A. propone di rimpiazzare in un elemento piano, *plat*, Bunsen, modello Ruhmkorff l'acido azotico che circonda il carbone con una soluzione di bicloruro di rame nell'acido cloridrico. Allora, con quel modello si hanno da 8 a 12 ampere. La soluzione cuprica è decomposta, il rame si deposita sul carbone ma non può restarvi, perchè in presenza dell'acido cloridrico e dell'aria si scioglie di nuovo quasi istantaneamente.

19. — A. Cornu. *Sulle strie spettrali spontaneamente invertibili, e loro analogie con quelle dell'idrogene.* — Nello spettro luminoso e nell'ultra violetto dei vapori incandescenti, spesso si osservano de' gruppi di strie che si succedono con una periodicità più o meno regolare, e da ciò nacque il pensiero di ordinare secondo una serie armonica, come i suoni, le strie di un medesimo spettro. Quella apparente regolarità sparisce quando si studiano le relazioni numeriche fra le lunghezze d'onda di quelle medesime strie, ma, dice l'A., non bisogna abbandonare

quel pensiero, perchè quel fenomeno è molto complesso, ed anche, p. es. un tubo cessa di dar la semplice serie dei suoni armonici se la sua lunghezza non è grande relativamente alla sezione. Così l'A. si è proposto una ricerca più generale; cioè di ricercare se in tutti gli spettri esistano gruppi di strie aventi caratteri comuni e indipendenti dalla natura chimica dei vapori incandescenti. E infatti l'A. pervenne a riconoscere tali caratteri in una categoria speciale di strie, da lui chiamate *spontaneamente invertibili*, e che egli già nel 1871 (*Compt. rendus*. tomo LXXXIII) dimostrò esistere nella maggior parte degli spettri dei vapori metallici.

Diciamo i caratteri di tali strie, trovati la prima volta dal Fizeau pei vapori del sodio. Un vapore incandescente di pochissima densità ed a bassa temperatura, comincia ad emettere una stria brillante e finissima, la quale, aumentando la densità e la temperatura, cresce di intensità e larghezza fino a diventare una *bande*, o lista luminosa con bordi indecisi; nella quale lista continuando ad aumentar la temperatura, si vede nascere una stria nera ove era la brillante primitiva; e finalmente quella lista si allarga in certa guisa indefinitamente. Quella stria nera si allarga all'incirca proporzionalmente alla lista, e sul fondo luminoso prodotto dallo espandersi di quella lista, le strie brillanti non invertibili spariscono affatto.

Questo fenomeno, che si osserva con la maggior parte dei metalli volatili e con la scintilla di induzione, si presenta in proporzioni enormi con l'arco voltaico e sopratutto nell'ultra violetto. L'A. cita come esempi la stria $\lambda = 228,85$ del cadmio, la $\lambda = 209$ dello zinco, e la stria quadrupla del magnesio, $\lambda = 280$, e quelle dell'alluminio e del tallio. Le strie dette *strie lunghe* rientrano nella stessa categoria.

Le leggi note dell'assorbimento luminoso e del raffreddamento bastano a spiegare questi fenomeni, ma se la teoria prevede la possibilità dell'inversione di una data stria, nulla però dice sulla proprietà di certe radiazioni, di mostrare, in date condizioni, l'inversione spettrale all'esclusione di certe altre, e tal proprietà sembra all'A. un nuovo elemento caratteristico da studiarsi.

Quando si guardano le prove fotografiche di quei gruppi di strie che, come lo dicemmo, sembran succedersi periodicamente, si riconosce che tali gruppi appartengono alla categoria delle strie spontaneamente reversibili, perchè alcune di esse si vedono già invertite ed altre stanno per esserlo. Tutto ciò secondo le condizioni esperimentali e la natura chimica del metallo. Inoltre vi si osserva che le strie vanno rinserrandosi, *se resserrant*, dal

lato più refrangibile, diminuendo di intensità, e sembra che, a misura che si innalza la temperatura, lo spettro tenda verso un aspetto limite, cioè quello di un fondo brillante continuo, senza strie, eccetto la serie regolare delle strie chiamate *spontaneamente invertibili*. È a questa costituzione spettrale limite che l'A. richiama l'attenzione degli osservatori.

Le più belle serie osservate dall'A. son quelle dell'alluminio e del tallio, i di cui equivalenti sono alle estremità della lista di quelli de' corpi semplici, e l'A. presenta una figura ove sono confrontati fra di loro, relativamente alle strie, tre spettri cioè, quello dell'idrogene e quelli di que' due metalli; e dove si son scelte le scale dei tre disegni spettrali in modo da far coincidere, sopra una stessa linea normale ai tre spettri, le strie G' e δ dell'idrogene con le omologhe degli altri due spettri, per la qual cosa, risultando una coincidènza fra le altre strie, l'A. è condotto alla importante conclusione seguente. « Negli spettri metallici, « certe serie di strie spontaneamente invertibili hanno sensibil- « mente le medesime leggi di distribuzione e di intensità delle « strie dell' idrogene ».

MM. Cailletet e Bouty. *Sulla conducibilità elettrica del mercurio solido e dei metalli puri, a basse temperature.* — La resistenza elettrica dei metalli puri cresce con la temperatura, e secondo esperienze note il suo coefficiente medio di aumento per un grado di temperatura fra 0° e 100°, differisce poco dall'uno all'altro metallo e poco da $^1/_{273}$. Se così fosse sempre quella resistenza si annullerebbe al zero assoluto, e potrebbe servire per la misura della temperatura. Nelle esperienze degli Autori il mercurio era in un tubo di vetro capillare, piegato a spirale e terminato da due tubi larghi nei quali erano immersi gli elettrodi di rame amalgamato. Un termometro a idrogeno penetrava nell'interno della spirale, e tutto stava immerso nel ghiaccio o in un bagno di cloruro metile o di etilene raffreddati mercè una corrente d'aria. Per altri metalli si sostituì al tubo una spirale di filo metallico, avvolta su di una intelaiatura di ebanite, che permetteva il mescolarsi degli strati liquidi e la uniformità della temperatura. La resistenza era confrontata con altra invariabile fatta da una colonna di mercurio a 0°, con un ponte di Wheatstone ed un sensibilissimo galvanometro a specchio.

La formula data da Mascart, Nerville e Benoit è applicabile fino alla temperatura di congelazione. Solidificandosi il mercurio aumenta la conducibilità nel rapporto di 4, 08; e poi continuando da — 40° a diminuire la temperatura la resistenza diminuisce, ed è da — 40° a — 92, 13 data dalla formula

$$(1 - 40.\alpha)\, r_t = r_{-40}.(1 + \alpha\, t)$$

ove $\alpha = 0,00407$, coefficiente prossimo molto a quello dei metalli puri solidi.

Per l'argento, l'alluminio il magnesio e lo stagno la formula è

$$r_t = r_0\,(1 + \alpha\, t).$$

Numerose esperienze hanno condotto gli Autori alla seguente tavola.

Argento	α =	0,00385	fra	+ 29°,97	e — 101°,75.
Alluminio	. .	0,00388	. .	+ 27,7	e — 90,57.
Magnesio	. .	0,00390	. . .	0,0	. — 88,31.
Stagno	. .	0,00424	. . . .	0,0	. — 85,08.

Le esperienze più estese e complete furon quelle pel rame, che per α diedero:

0,00418	. fra 0°	e	— 58°,22
0,00426	. 68,65	.	— 101,30
0,00424	. 113,08	.	— 122,82;

valori più forti di quelli che si deducono dalla formula di Matthiessen e Benoit, e così regolari, che nel caso dispenserebbero dall'uso del termometro a idrogene per temperature fra — 20° e — 123°, ed è molto probabile che tale regolarità sussista per temperature ben più basse.

La formula $r_t = r_0\,(1 + \alpha\, t)$ si applica al ferro da 0° a — 92°, con $\alpha = 0,0049$, e non al platino; ma quest'ultimo si approssima agli altri metalli puri a misura che la temperatura si abbassa. In conclusione riman provato che la resistenza della maggior parte dei metalli puri decresce regolarmente con la temperatura da 0° a — 123°, con un coefficiente di variazione uguale per tutti. Gli Autori stanno continuando le ricerche per temperature le più basse ottenibili.

M. Krouchkoll. *Polarizzazione dei tubi capillari metallici per eflusso liquido ad alta pressione.* — Tubo e liquido comunicano con un elettrometro capillare. Fino a 15 atm. non si scorge alcuna polarizzazione del tubo, ma innalzando la pressione un tubo di rame o di platino diventa negativo, e la corrente andrebbe nella direzione dell'eflusso liquido. La pressione variò da zero a 200 atm., e la forza elettromotrice da zero a 0,06 volt, col platino. Col rame la pressione variò da zero a 250 atm., e la forza elettromotrice a 0,063 volt. Questa forza elettromotrice non si produce spingendo lungo il tubo la soluzione salina del

metallo che forma il tubo medesimo, qualunque sia la pressione.

M. Jablochkoff. *Sopra una nuova pila, detta autoaccumulatore.* — Si compone di una vaschetta piana di piombo oppure piombata, nella quale si mettono dei pezzi di metallo ossidabile, che può esser sodio, amalgama di sodio, zinco o ferro. Poi si riempie la vaschetta fino al colmo, con una materia spugnosa qualunque, p. es. tela, segatura di legno. Se si adopra sodio, non è necessario di metter acqua perchè si forma soda caustica che attira la umidità; e se si adopra zinco o ferro si bagnerà la materia spugnosa con una soluzione di sal marino, o meglio di cloruro di calcio. Sulla massa spugnosa resa piana si dispone una serie di tubi di carbone poroso.

Così l'elemento è formato ma è aperto, e in lui si formano due correnti locali fra il metallo ossidabile e l'elettrode sul quale egli è posto; e quest'ultimo aumenta il suo potenziale fino ad esser uguale a quello del metallo. Riunendo con un filo conduttore l'elettrode così polarizzato all'elettrode del carbone si ha una corrente esterna, e quelle due correnti locali vanno restituendo all'elettrode la carica a misura che si consuma.

La forza elettromotrice facendo uso di sodio e 2,2 volt, e col zinco 1,6 volt. La resistenza interna per una vaschetta a dieci cent. di lato, varia da 0,25, a 0,5 ohm. È una pila semplice a maneggiarsi; basta di rinnovare il liquido di quando in quando; non lavora quando non si utilizza, e non ha odore.

C. Vincent e Friedel. *Sulle tensioni e sui punti critici di alcuni vapori.* — Gli Autori presentano ora i soli resultati ottenuti coll'acido cloridrico e col cloruro di metile, e descrivono alcune disposizioni esperimentali. Il punto critico dell'acido cloridrico è compreso fra 51 e 51°, 5; e quello del cloruro di metile è prossimo a 141°, 5. La curva delle tensioni del vapore del cloruro di metile stabilita secondo la nota formula di Regnault è d'accordo con le esperienze degli Autori verso 35°, ma dopo quest'accordo cessa, ed a 141° la differenza è circa di 12 atm.

20. — J. Jamin. *Sull' irraggiamento notturno.* — È noto che nell'aprile e nel maggio, il termometro talvolta scende a — 5 od a — 7°, a cielo sereno e vento del nord. Questo avvenne nelle notti dell'11 e del 12 maggio ultimo scorso, e cagionò un vero disastro nella Champagne. La causa è l'irraggiamento notturno; e l'A. imprende a dimostrare il perchè in quelle epoche quell'irraggiamento raggiunga la massima intensità. Quando si esaminano le osservazioni in pallone aereostatico da diversi areonautici, e principalmente dal Glaisher, non vi si riconosce legge alcuna. Questo avviene perchè, come già fu detto dall'A. in una

Nota dell'anno scorso sulle osservazioni igrometriche che si fanno attualmente negli Osservatori Meteorologici, si usa calcolare soltanto il valore numerico del così detto rapporto igrometrico, il quale non dice nulla sulla quantità di vapor d'acqua esistente nell'unità di volume; e invece di quel rapporto si dovrebbe dar quello fra la forza elastica f del vapore e il valore noto $H - f$, rapporto che dall'A. fu detto *ricchezza igrometrica.*

Fortunatamente coi dati delle osservazioni del Glaisher l'A. potè far calcolare quell'ultimo rapporto, per altitudini comprese fra 0, e 7500 metri; e così pose in evidenza che la detta *ricchezza igrometrica* alla superficie del suolo varia poco nei diversi mesi dell'anno, ma diminuisce coll'altitudine; e tal diminuzione con l'altitudine decrebbe lentamente presso il 18 di agosto, e poi sempre più rapidamente da quell'epoca in poi. Nel 18 di aprile, non vi era più vapore a 3500 metri di altezza, mentre ve ne era notevolmente a 7500 metri negli altri mesi dell'anno. Dunque nel mese di aprile è l'epoca delle brine (*gelees*) di primavera, e perciò allora è massimo l'irraggiamento notturno, essendochè il vapore d'acqua è impermeabile al calore. Al contrario nell'agosto è nelle grandi altezze maggiore la umidità, per cui pioggie abbondanti e notti calde.

E. Mercadier. *Verificazione delle leggi di vibrazione delle lamine circolari.* — Secondo la nota teoria si ha:

$$n = k \frac{e}{d^2},$$

ove n è il numero delle vibrazioni, e la grossezza della lamina, d il diametro, e k un coefficiente variabile con la natura della lamina. L'A. pubblicò già nei *Conti resi* t. XCVIII le sue esperienze sulle lamine rettangolari allungate; e le esperienze d'ora furon fatte in vista di ricerche telefoniche. Furon studiati dei dischi di ferro dolce grossi 1, 5, ed 1, 0, millim., mantenuti in vibrazione da elettromagneti ed orizzontali. Il disco posava su tre punte di sughero equidistanti fra loro, equidistanti dal centro, e sulla linea nodale circolare corrispondente al primo armonico. Questa linea il di cui raggio è secondo la teoria 0,68 del raggio del disco, stava immobile quando il polo dell'elettrocalamita era sotto il centro del disco.

Quella formula nelle esperienze non risultò esatta, sia pei diametri che per le grossezze. In seguito, l'A. esperimentò con molti dischi di acciaio fuso buonissimo, laminato e rincotto fra le successive laminazioni, e con molta cura. Le grossezze variarono da uno ad un mezzo millimetro, circa, e ancora questa volta i resultati non corrisposero alla teoria. Ma poi esperimentando

con dischi più grossi, i resultati furon meno discordi con la teoria; e l'A. concluse che quella formula è tanto più esatta quanto maggiori son quelle grossezze. La Nota contiene molte tavole numeriche.

E. Demarçay. *Sulla scintilla di induzione ad alte temperature, e sul suo uso nella spettroscopia.* — La temperatura di quella scintilla dipende, quasi unicamente, dalla intensità dell'extracorrente di apertura del circuito inducente e dal ridurre il più possibile al minimo la scintilla di tale apertura; la qual ultima cosa si ottiene con condensatori in comunicazione con gli estremi dell'induttore, come fu insegnato dal Fizeau. Così pare che la energia di quella scintilla si possa far passare in quella di induzione. Le temperature delle scintille furono valutate con un metodo già indicato dall'A. nei *Conti resi*, t. XCIX; ed i rocchetti adoperati dall'A. davano scintille lunghe da 18 a mezzo centimetro. Col metodo dell'A., per avere alta a piacere la temperatura della scintilla di induzione, con un rocchetto qualunque, non si ha che aumentare l'extracorrente di apertura, aumentando la corrente inducente, sempre avendo cura di ridurre convenientemente la scintilla di apertura. Questa Nota ha molte indicazioni relative a casi diversi, ma non suscettibili di un breve Sunto. X.

Sunti di ANNIBALE STEFANINI.

G. Wiedemann. *Sulla determinazione dell' ohm* (*K. Preuss. Ak. der Wiss.* Berlin 1884). — Dei tanti metodi proposti per la determinazione dell' ohm, nessuno, come già altra volta l'A. ebbe occasione di notare (*N. Cimento.*, 1883), sembra meritare un' assoluta preferenza; talchè non resta altro mezzo che eseguire molte determinazioni con i vari metodi e poi confrontare fra loro i risultati ottenuti.

Uno fra i metodi più raccomandabili è quello che fu indicato da W. Weber, cioè di far ruotare di 180° attorno la verticale una spirale che abbia le sue spire in piani verticali e dirette nel meridiano magnetico, e misurare con un galvanometro, di cui sia noto il coefficiente di riduzione, l'intensità della corrente indotta nella spirale dal magnetismo terrestre.

Le ricerche di cui è oggetto questa memoria furono eseguite con due apparecchi simili fra loro; quelle preliminari cioè con l'induttore e col moltiplicatore che per graduare e confrontare campioni di resistenza in misura assoluta elettromagnetica erano stati costruiti dal Repsold dietro le indicazioni di W. Weber e di Fr. Zöllner, e che erano stati peraltro opportunamente modificati dal Wiedemann; per le esperienze definitive, ai circuiti

dell' induttore e del galvanometro (moltiplicatore) avvolti da Weber furon sostituiti altri circuiti, allo scopo di determinarne colla massima esattezza le dimensioni.

Le spirali di quegli apparecchi avevano un diametro interno di circa 96 c. m. e un' altezza di c. m. 25,4. Nella prima serie di esperienze constavano di 792 spire ciascuno, ripartite in 12 strati; nella seconda serie le spire furono 804 ripartite pure in 12 strati. La superficie racchiusa da tali spire, e il momento di rotazione impresso al magnete del galvanometro dalla corrente d'intensità uguale all'unità furon determinati sia con le misure dirette, sia col metodo galvanometrico indicato dal Kohlrausch (*Wied. Ann.* 18, 1883).

La durata d' oscillazione del magnete fu fatta variare (da 55″ a 65″) per mezzo di pesi che venivano applicati a diverse distanze su una sbarra unita al magnete, e fu registrata con un cronografo Hipp unito ad un pendolo a secondi, che era confrontato spesso con l'orologio normale dell'Osservatorio astronomico di Lipsia.

Il rapporto fra le intensità del magnetismo terrestre nell'induttore e nel galvanometro fu determinato con la durata d'oscillazione di uno stesso sistema magnetico introdotto nei due apparecchi, e controllato con un variometro di Kohlrausch, alquanto modificato dall' A.

La velocità comunicata al magnete del galvanometro dall' induzione dovuta ad un sol giro dell'induttore fu determinata con una modificazione del metodo di moltiplicazione. Senza aspettare che la deviazione divenisse costante, il Wiedemann comunicava all'ago un numero d'impulsi (da 19 a 20 ordinariamente) tale, che la deviazione, pure essendo abbastanza grande, restasse entro i limiti della scala. Così veniva ottenuto il vantaggio di far durare pochissimo le determinazioni (che altrimenti avrebbero richiesto almeno $^3/_4$ d'ora); e di più un errore che potesse essere stato commesso nella determinazione del decremento logaritmico, ha assai minore influenza in questo metodo che nell'altro comunemente adoperato.

La distanza della scala dal magnete del galvanometro fu misurata direttamente e controllata con una triangolazione fatta con un teodolite.

Le esperienze furon fatte a Lipsia in un vasto locale a pian terreno, lontano dalla circolazione, nel quale non si avevano masse di ferro mobili, e ove la temperatura non subì variazioni superiori ad 1° c. in tutta la durata delle ricerche.

Tralasciamo d' indicare tutte le precauzioni prese dall' A. onde le determinazioni riuscissero esatte, e tutte le correzioni

introdotte nel calcolo delle esperienze, che sono dettagliatamente descritte in questa memoria, e indichiamo sommariamente i resultati ottenuti.

La formula finale adoperata dal Wiedemann permetteva di determinare in misura assoluta elettromagnetica il valore della resistenza del circuito formato dall'induttore e dal galvanometro; e per ottenere il valore dell'*ohm* in centimetri di mercurio, furon fatte due serie d'esperienze: una col circuito formato dalle sole spirali degli apparecchi, e un'altra introducendo in quel circuito una resistenza del valore indicato di 10 U. S. I valori trovati per quelle resistenze sono i seguenti, ottenuti come medie finali di molte determinazioni:

Spirali con 792 giri.

Induttore e moltip. soli: ohm 9,88357 a 5°, 314 c.
Induttore, moltipl. e 10 U. S: ohm 19,2567 a 5°, 70 c.

Spirali con 804 giri.

Induttore e moltipl. soli: ohm 10,0913 a 5° 82 c.
Induttore moltipl. e 10 U. S: ohm 19,4723 a 5, 80 c.

La resistenza delle spirali fu paragonata con quella del campione di 10 U. S. anche col ponte di Wheatstone. L'esatto valore del campione in U. S., ad una data temperatura, fu determinato prima e dopo di quel confronto dal Dr. O. Fröhlich nell'officina Siemens e Halske di Berlino; e dall'A. stesso quel campione fu confrontato con un'unità normale di Siemens. Il coefficiente di variazione della resistenza, per la temperatura, del filo di rame delle spirali adoperate, fu pure determinato direttamente, e dopo tutte le correzioni necessarie, dall'insieme delle esperienze precedenti, i cui resultati furono sempre moltissimo concordanti, il Wiedemann ottenne

1. U. S. = 0,94196 ohm.
1. ohm = 1,06162 U. S.

L'*ohm* corrisponderebbe dunque alla resistenza di una colonna di mercurio, di 1^{mmq} di sezione, della lunghezza di 106^{cm},162 alla temperatura del ghiaccio fondente.

Questo resultato finale concorda benissimo con quello ottenuto da altri sperimentatori, come resulta dalla relazione che il Prof. Roiti fece della Conferenza internazionale degli elettricisti tenuta a Parigi nel 1884 (*N. Cim.* XVI. pag. 7). Il numero 106,19 ivi indicato risultava da una comunicazione preliminare fatta dal

Wiedemann alla Conferenza; ma rivedendo i calcoli resultò pel valore dell'*ohm* il numero 106,162.

Ann. der Phys. und Chem. von G. Wied. XXIII, 1884.

3. — O. Schumann. *Sulla costante di attrito dei gas, e dei vapori, e sulla loro dipendenza dalla temperatura.* — Per completare le ricerche già fatte insieme con L. Meyer sulla traspirazione dei vapori, l' A. ha adoprato il metodo di Maxwell per determinare specialmente l' influenza della temperatura. Avendo nelle ricerche preliminari trovato resultati del tutto diversi da quelli indicati da altri osservatori, l'A. eseguì una serie di esperienze sull' aria, onde riconoscere l' applicabilità del metodo. Da queste risultò che le dimensioni dell' apparecchio influiscono sui numeri finali, e che le differenze fra i valori calcolati con la formula di Maxwell e quelli dedotti dalle osservazioni crescono con la temperatura. Queste differenze non si spiegano con l'influenza delle parti accessorie dell'apparecchio, ma l'errore è da cercarsi nella trattazione matematica del problema. L'A. si servì quindi di una formula empirica, tale che esprimesse nel modo migliore i resultati ottenuti: essa dà pel coefficiente η di attrito:

$$\eta = c \frac{\lambda}{\tau} (1 - y c \lambda \mathrm{D}) .$$

ove λ è il decremento logaritmico, c deve calcolarsi, mediante le dimensioni dell'apparecchio, dalla formula del Maxwell $\eta = c\,\lambda/\tau$, τ è la durata di oscillazione, D la distanza fra le superficie su cui ha luogo l'attrito, ed y è un numero che dipende dall'apparecchio adoprato; in y potrebbero perciò esser contenuti dei termini che rendessero omogenea la parte della formula racchiusa fra parentesi.

Il metodo della traspirazione conduce a valori del coefficiente d'attrito che, ad alte temperature, pei gas sono troppo grandi e pei vapori sono troppo piccoli; ciò è dovuto in parte alla teoria difettosa, in parte all' impossibilità di raggiungere in pratica le condizioni teoriche. A temperature ordinarie i due metodi dànno resultati concordanti; talchè la divergenza per alte temperature deve ricercarsi, secondo l' A., nell' influenza dell' assorbimento che sarebbe maggiore pei vapori che pei gas.

La variazione del coefficiente d'attrito per effetto della temperatura sarebbe per l' aria, secondo l' A., data dalla relazione:

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1 + \alpha t}\,(1 + \gamma t)^2$$

ove η_0 è il coefficiente d'attrito a 0°, α è il coefficiente di dilatazione del gas, e γ è un coefficiente relativo alla sfera d'azione molecolare, che per l'aria è $\gamma = 0{,}000802$. Per l'anidride carbonica ($\alpha = 0{,}003701$) si avrebbe invece $\gamma = 0{,}000889$.

Ciò stabilito, l'A. sottopose all' esperienza i vapori di molti eteri, e trovò che per tutti la funzione della temperatura è quasi la stessa, ma che differisce da quella che vale pei gas. Pel benzolo resultò $\gamma = 0{,}00185$, per altri vapori $\gamma = 0{,}00164$. Ciò corrisponderebbe ad ammettere che la temperatura influisse con una potenza (1,3) più alta di quella che resulterebbe dalle esperienze di Puluj. Non fu potuto trovare una dipendenza del coefficiente d'attrito dalla pressione.

L'A. indica anche alcune costanti adoprate nella teoria cinetica dei gas, come velocità, e traiettoria libera molecolare, sezione e volume della sfera d'azione molecolare. Quest'ultima differisce tanto più da quella calcolata teoricamente da Kopp, quanto maggiore è il peso molecolare; quindi la coesione crescerebbe col peso molecolare.

La relazione trovata da Puluj fra la traiettoria libera molecolare e l'indice di refrazione, è valida per i vapori di eteri omologhi a temperature corrispondenti.

A. Blumcke. *Sulla determinazione del peso specifico di alcuni liquidi che esistono soltanto ad alte pressioni.* — L'A. descrive un apparecchio che serve a determinare i pesi specifici suindicati, ma del quale non è possibile dare una giusta idea senza l'aiuto di disegni.

Dalle esperienze fatte in proposito, per il peso specifico S delle soluzioni di anidride carbonica nell'acqua, ottenute con pressioni che giunsero a 55 atm. l'A. ricava la formula, valida fra 2 e 20° c.

$$S = \frac{1 + n.\,0{,}001965}{1 + n.\,0{,}001568},$$

ove n è il numero dei volumi di CO_2 assorbiti da 1 volume di H_2O; il numero 0,001965 è il peso in grammi di 1 cmc. di CO_2 a 0° e a 760 mm, alla latitudine di 45°; e il numero 0,001568 è una costante, dedotta dalle esperienze dell' A., che rappresenta l'aumento di volume che subisce l'acqua ad ogni volume di CO_2 che assorbe.

L'A. non è peraltro in grado di decidere se la CO_2 funziona, nella soluzione, da gas o da liquido.

H. Kayser. *Sulla condensazione della* CO_2 *sulle superficie del vetro, e sulla sua diffusione attraverso i grassi.* — Sono state già riferite in questo Giornale (XV. pag. 173 e 183; XVI.

pag. 152) le ricerche del Bunsen e del Kayser sul soggetto indicato. Ora il Kayser osserva che le discrepanze fra i resultati proprii e quelli del Bunsen potrebbero esser dovute all'aver l'uno adoprato del vetro privo di rivestimento atmosferico, e l'altro del vetro ordinario, e che quindi la CO_2 possa sostituire soltanto lentamente l'aria già condensata sul vetro, e che una data quantità d' aria sia sostituita da una maggior quantità di CO_2. Questa spiegazione sarebbe convalidata da una nuova serie di ricerche fatte all' uopo dal Kayser, dalle quali resulta pure che la quantità di gas condensata sul vetro cresce col crescere della pressione e decresce col crescere della temperatura, quando il vetro sia stato precedentemente privato del rivestimento atmosferico.

W. v. Bezold. *Ricerche sulla carica e sulla conducibilità dei dielettrici.* — Dalla teoria dell'elettroforo, che stabilisce fondandosi sulle esperienze proprie e di molti altri, L'A. deduce le due seguenti proposizioni, che è facile verificare:

L'azione reciproca fra due lastre piane parallele, caricate di elettricità opposte, è aumentata, introducendo fra esse un dielettrico, se la differenza di potenziale fra le due lastre è mantenuta costante.

Se le due lastre hanno cariche diverse, ma sono allo stesso potenziale l'introduzione d' un dielettrico non ha influenza alcuna se le lastre son grandi molto in confronto della loro distanza; altrimenti il dielettrico frapposto ne diminuisce l' azione mutua, funzionando come uno schermaglio conduttore.

C. L. Weber. *Sulla conducibilità galvanica e sulla classificazione termoelettrica delle amalgame, in rapporto alla variabilità della loro struttura.* — Le amalgame che contengono piccolissime quantità di metalli hanno un contegno termoelettrico affatto regolare, ed hanno un coefficiente di temperatura ben determinato, che fra 0, e 100° c. è rappresentato quasi esattamente da una retta.

Ma quando il metallo aumenta, in modo che l' amalgama sia costituita da due porzioni, una più solida dell' altra, cominciano le irregolarità. Collo stagno ciò accade quando ha raggiunto l' 1, 5 per °/₀; col bismuto all' 1 per °/₀. In generale dopo il riscaldamento non ritornano, tali amalgame, alla primitiva resistenza; ma la presentano maggiore, eccettuato il caso che il raffreddamento sia lentissimo: per un rapido raffreddamento, soltanto dopo alcuni giorni mostra la tendenza a riprendere il primo valore.

Pel contegno termoelettrico l' A. si servì della formula di Avenarius:

$$E = A(T - t) + b(T^2 - t^2),$$

dalla quale, indicando con a il valor medio che A prende alla temperatura di 25°, si ha la formula più comoda

$$a = \frac{E}{T-t} - b(T + t - 50).$$

Per la coppia rame-mercurio l'A. trovò i valori:

$$a = 516{,}6 \times 10^{-8}\,D$$
$$b = 1{,}31$$

ove D indica la forza elettromotrice di un elemento Daniell.

Per le amalgame furon notate irregolarità notevoli esperimentando ad alte e a basse temperature; ma il senso alternativo di esse mostra che devon ritenersi causate da cambiamenti molecolari. Ciò accade specialmente per le amalgame molto ricche di metalli.

L'A. dà i valori trovati per le costanti a e b relative a molte amalgame, di composizioni diverse; da essi, considerando le amalgame molto povere quali soluzioni metalliche, resulterebbe che la serie termoelettrica dei metalli sciolti nella proporzione di 0,5 per ogni 100 di Hg, sarebbe

Sn, Ag, Pb, Zn, Cd, Bi.

L'A. propone poi di adoperare il mercurio come metallo cui riferire i poteri termoelettrici degli altri, avuto riguardo alla facilità di ottenerlo puro, e al fatto osservato da Matteucci e da Magnus, che il mercurio è il solo metallo che non dia corrente termoelettrica quando si pongano a contatto porzioni di esso che sieno a temperature diverse.

F. Kohlrausch. *Sulla teoria del trasporto nella termoelettricità.* — Nel vol. XV. pag. 80 di questo Giornale fu dato cenno di un lavoro in cui il Budde faceva delle obiezioni alla teoria che il Kohlrausch propose per la termoelettricità.

Ora il Kohlrausch fa osservare che la probabilità che la formula di Avenarius non sia valida per altissime temperature, non costituisce una seria obiezione, perchè un metallo, portato a due temperature molto lontane fra loro, non rappresenterà più un solo e medesimo corpo, in seguito appunto alle alterazioni di struttura cui il Budde aveva accennato.

La contradizione che il Budde trovava fra la teoria del Kohlrausch ed i principii della termodinamica consisteva nel trasporto di calore che, secondo quella teoria, sarebbe avvenuto lungo un filo metallico mantenuto a temperatura costante. Il Kohlrausch risponde che se il calore, qualunque cosa esso sia, è mobile in

un corpo, potrà passare da un punto all'altro di un corpo a temperatura costante, quando vi sia *spinto* da qualche causa, che potrebbe essere appunto l'elettricità.

Quindi le teorie del trasporto e del contatto non si contradicono, e possono ambedue spiegare i fenomeni termoelettrici.

F. NEESEN. *Sull'influenza della magnetizzazione sulla resistenza elettrica di liquidi magnetici, e su un metodo per determinare la resistenza degli elettroliti.* — L'apparecchio proposto per misurare la resistenza di un elettrolita consiste in un ponte di Wheatstone, nel quale due lati consecutivi hanno resistenze metalliche uguali fra loro, e degli altri due lati uno è formato da un tubo ripieno dell'elettrolita, in cui pescano elettrodi del metallo corrispondente, e l'altro lato è formato da un tubo più corto, parimente ripieno dell'elettrolita, munito di elettrodi in tutto uguali ai precedenti e da una cassetta di resistenze metalliche graduate. Essendo così neutralizzato l'effetto della polarizzazione, la resistenza dell'elettrolita la cui lunghezza è la differenza fra le lunghezze dei due tubi è data direttamente dalla resistenza che si deve introdurre con l'anzidetta cassetta in un ramo del ponte perchè il galvanometro non devii.

Dalle esperienze eseguite dall'A. resulta che quando il solfato di ferro è introdotto in un campo magnetico in modo che le linee di forza magnetica siano perpendicolari alle linee di corrente, non si ha nessun cambiamento nella resistenza; quando invece i due sistemi di linee son paralleli, la resistenza varia o forse varia la polarizzazione dell'elettrolita.

W. VOIGT. *Teoria della rotazione elettromagnetica del piano di polarizzazione.* — Seguendo il Kundt (*Wied. Ann.* XXIII. 1884). l'A. applica la teoria che egli stabilì per i fenomeni luminosi, al caso dei mezzi magneticamente attivi sulla luce polarizzata. La memoria è d'indole affatto matematica, e non possiamo indicar quì altro che i resultati ottenuti, e che sono:

Nei cristalli magneticamente attivi, in ogni direzione si propagano due onde polarizzate ellitticamente, con rotazioni opposte, e con velocità diverse; le ellissi hanno i loro assi paralleli alle direzioni nelle quali, se non ha luogo rotazione elettromagnetica, si compiono le vibrazioni delle due onde polarizzate.

Le due ellissi sono simili e fra loro ortogonali. Nella direzione dell'asse ottico la polarizzazione è circolare.

A. WÜLLNER. *Osservazioni alla memoria del sig. W. Voigt sulla « Teoria dei mezzi isotropi assorbenti ecc. »* — L'A. fa notare che la denominazione di *azimut principale* che ha adoperato nel suo trattato di fisica a proposito di un certo angolo, e nella quale il Voigt non concordava, l'ha tratta dai lavori del Jamin, cui si riferiva lo stesso Voigt.

4. — O. LUMMER. *Su un nuovo fenomeno d'interferenza.* — L'A. osservò che quando il cannocchiale dello spettrometro, munito dell'oculare di Gauss, è perpendicolare a una faccia del prisma, presso l'immagine del reticolo si vede sempre un gran numero di finissime strie d'interferenza. Tali strie si possono ottenere e misurare anche con altre disposizioni che l'A. descrive estesamente; e in questa memoria è data anche la teoria del fenomeno.

K. WESENDONCK. *Sulla diatermaneità delle soluzioni d'esculina.* — Le ricerche furon fatte per constatare se i fenomeni della florescenza nei corpi così detti di seconda classe (esculina, curcuma, ecc.) potessero ritenersi dovuti all'assorbimento di vibrazioni ultra rosse combinato con l'assorbimento delle vibrazioni violette, come resulterebbe dalla teoria del Lommel. L'A. non ottenne segni certi di tale assorbimento nelle soluzioni di esculina, almeno fino alla lunghezza d'onda di 900 milionesimi di millimetro.

W. VOIGT. *Sulla teoria della dispersione e dell'assorbimento e specialmente sulle proprietà ottiche della fucsina solida.*

Id. *Sulla teoria dell'assorbimento della luce nei cristalli.* — L'A. confronta i resultati di alcune esperienze con le teorie stabilite in altri suoi lavori, e trova fra essi perfetto accordo. Fra le deduzioni che ne seguono, è da notare quella che convaliderebbesi l'idea, emessa già dall'A., che le molecole ponderabili debbano ritenersi, per ciò che riguarda i fenomeni ottici, immobili nei corpi.

W. MÜLLER-ERZBACH. — *Nuovo metodo per determinare la tensione del vapor d'acqua nei sali idrati.* — La quantità d'acqua che evapora da un tubo di lunghezza e sezione costanti, e mantenuto in un ambiente d'aria secca, è proporzionale, secondo l'A., alla sezione del tubo, e alla tensione del vapor acqueo alla temperatura dell'esperienza, e inversamente proporzionale alla lunghezza del tubo. Ciò stabilito, prendendo due tubi uguali, contenenti: uno dell'acqua distillata, l'altro un sale idrato, e ponendoli ambedue in uno stesso ambiente disseccato con $H_2 SO_4$, le diminuzioni di peso osservate in tempi uguali nei due tubi forniranno il modo di determinare le forze elastiche del vapore emesso dalle due sostanze.

L'A. riferisce di alcune esperienze fatte con questo metodo sui composti: $Na_2 H PO_4 + 12 H_2 O$; $Na_2 SO_4 + 10 H_2 O$; $Na_2 CO_3 + 10 H_2 O$; $Na_2 B_4 O_7 + 10 H_2 O$.

E. PFEIFFER. *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni di CO_2, e su un metodo per misurare le resistenze dei liquidi soggetti ad alte pressioni.* — Le soluzioni di CO_2 venivano ottenute

mediante pressioni esercitate con una pompa Cailletet; il metodo usato per misurarne la resistenza consisteva nell'adoprare correnti alternate e un ponte Siemens. I resultati ottenuti mostrerebbero che nelle soluzioni la CO_2 funziona da liquido e non da gas.

O. Boekmann. *Sulla resistenza elettrica dei contatti microfonici durante il movimento.* — Un pezzo di carbone di storta venne fissato con ceralacca alla lastra vibrante di un telefono; un altro pezzo, fissato ad una vite micrometrica, gli veniva posto a contatto con pressioni che potevano variarsi a volontà. Con dei diapason elettromagnetici si mandava nel telefono una rapida successione di correnti, che determinavano una vibrazione regolare, e si misuravano le variazioni di resistenza del contatto fra i carboni. Onde le esperienze riescano è necessario che i carboni sien puliti accuratamente con finissima carta smerigliata. In queste condizioni fu trovato che a parità di altre circostanze, la resistenza del contatto diminuisce nel movimento (e tanto maggiormente quanto minore è la pressione iniziale), mentre cresce al diminuire dell'intensità della corrente, e diminuisce col diminuire dell'ampiezza del movimento, per riprendere in ogni caso il valore iniziale al cessare del moto.

La resistenza durante il moto, a parità delle altre condizioni, è indipendente dal numero delle vibrazioni che la lastra telefonica compie al secondo.

H. Wild. *Determinazione del valore dell' unità Siemens di resistenza elettrica in misura elettromagnetica assoluta.* — L'A. comunica i dettagli delle sue nuove misure, fatte col metodo dello smorzamento, opportunamente modificato; e tenendo conto delle osservazioni fatte in proposito di queste misure elettriche dal Dorn, trova

$$1.\ \text{U. S.} = 0{,}94315\ \text{ohm}$$

e quindi 1 ohm $= 106^{cm},027$ di mercurio, a 0°, della sezione di 1 mm q.

J. Rosenthal. *Un nuovo galvanometro.* — L'innovazione consiste nell'usare un magnete a ferro di cavallo, sospeso ad un lungo filo per un punto della sua linea neutra. Le branche, che sono quindi verticali, son munite alle loro estremità di espansioni circolari, che hanno il centro sull'asse di rotazione. Queste espansioni penetrano nell'interno di due rocchetti cilindrici, con le spire avvolte in modo che una corrente che le percorra produca una rotazione uguale nelle due espansioni polari. Il magnete è munito del solito specchio per le letture col cannocchiale, e l'A. ha trovato che, senza alcuna compensazione, la deviazione

di $0^{mm},1$ osservata con una scala posta alla distanza di 2700^{mm}, corrispondeva, sul suo galvanometro, ad una corrente di $\frac{54}{10^{10}}$ di *ampère*. Colla compensazione si può ottenere una sensibilità quadrupla.

K. Schering. *Magnetometro quadrifilare, per determinare le variazioni della componente verticale del magnetismo terrestre.* — Un cilindro cavo d'acciaio, magnetizzato, lungo 30^{cm}, del diametro interno di circa 1^{cm}, è mantenuto con l'asse orizzontale mediante due coppie di fili metallici, lunghi circa 5^{m}, fissati inferiormente alla staffa che porta il magnete, e superiormente a due sostegni distanti fra loro di circa $10^{m},5$. I sostegni superiori son fatti in modo che i fili sieno tutti ugualmente tesi. Uno specchio fisso al magnete permette di notare con un cannocchiale i movimenti dell'ago attorno ad un asse orizzontale e perpendicolare alla sua lunghezza. Questo sistema, in confronto della sospensione bifilare e della bilancia di Lloyd, ha il vantaggio di diminuire l'influenza dello spostamento del centro di gravità del magnete in seguito alle variazioni di temperatura, e quella dell'elasticità susseguente dei fili di sospensione.

Philosop. Magazine. Vol. XIX, 1885.

116. — J. Croll. *Sui periodi interglaciali artici.* — È un lavoro che interessa particolarmente la geologia.

A. M. Worthington. *Moltiplicatore capillare.* — È uno strumento che serve per determinare le costanti capillari dei liquidi. Consiste in una sottilissima foglia di platino, di forma rettangolare ($50^{cm} + 5^{cm}$) avvolta su se stessa a rocchetto cilindrico, con le successive circonvoluzioni tenute distanti l'una dall'altra di circa 2^{mm}, per mezzo di fili di vetro lunghi 2^{cm}., che si interpongono nella parte superiore del rocchetto. Le estremità inferiori delle circonvoluzioni sono in uno stesso piano, e lo strumento si usa sospendendolo con 3 fili di seta ad un braccio di una bilancia, in modo che il suo piano inferiore orizzontale possa venire immerso nel liquido di cui si vuol determinare la costante capillare.

Lo strumento rappresenta una serie di tubi cilindrici coassiali, e se w è la periferia totale (doppia della larghezza del rettangolo da cui è formato) e p è il peso del liquido sollevato, la tensione superficiale per unità di lunghezza è $\frac{w}{p}$.

Le sostanze adoperate nella costruzione di questo apparecchio permettono di adoprarlo sempre pulito e nelle stesse condizioni arroventandolo volta a volta in una fiamma alla Bunsen.

A. M. Worthington. *Nota su un punto della teoria delle goccie liquide.* — Riferendosi a un suo precedente lavoro (*Proc. Roy. Soc.* 1881), l'A. mostra come per determinare la costante capillare di un liquido dalla forma delle goccie a base circolare, si possa fare a meno di una delle due misure richieste dalla teoria.

A. Elsass. *Nuova forma di monocordo.* — È l'apparecchio descritto già in questo Giornale, Vol. XVII, pag. 161.

W. N. Hartley. *Influenza dell'aggruppamento atomico sulle proprietà fisiche dei composti.* — È una breve nota sul modo di considerare la formula di costituzione del benzolo, deducendola dalle sue proprietà ottiche e calorifiche.

R. H. M. Bosanquet. *Magneti permanenti.* - II. *Diminuzione del magnetismo - Correzione del valore di* H *ad Oxford.* — L'A. dà, in una tavola, le variazioni del momento magnetico di un magnete di acciaio, osservate dal 18 febbraio al 18 settembre 1884. In quei 7 mesi il momento magnetico M diminuì nella proporzione di 12 a 11.

Pel principio del marzo 1884 il valore di H ad Oxford, corretto per le variazioni di M, sarebbe 0,18056 e non 0,18011 come fu altra volta indicato (*N. Cim.* XVI. pag. 257).

M. Cailletet. *Sull'uso del metano nella produzione di bassissime temperature.* — Il Cailletet, riferendosi a una comunicazione che egli presentò suggellata alla Accademia delle Scienze di Parigi il 12 Dicembre 1881, e che fu aperta il 4 Agosto 1884, reclama la priorità della scoperta suindicata, in confronto del Dewar che usò il metano come refrigerante solo nel 1883. (*N. Cim.* XVII. pag. 89).

P. E. Chase. *Fillotassi degli elementi.* — L'A. rammenta che egli aveva da qualche tempo (*Proc. Amer. Phil. Soc.* XIX e XX) che i pesi atomici degli elementi posson rappresentarsi con vari divisori fillotassici meglio che con la legge del Prout. Osserva poi che la serie data dal Mills per i pesi atòmici (*N. Cim.* XVII. pag. 265) è della stessa forma di quelle che compariscono nello studio dei moti armonici nei sistemi stellari.

C. D. Ahrens. *Nuova forma di prisma polarizzante.* — L'A. ha ottenuto una sufficiente separazione delle due immagini facendo il prisma di 3 pezzi opportunamente tagliati da uno spato d'Islanda, e riunendoli fra loro con del balsamo del Canadà. La lunghezza del prisma non eccede il doppio della sua larghezza, e si presta meglio dei Nicol nei microscopi polarizzatori.



FENOMENI DI RIFLESSIONE CRISTALLINA INTERPRETATI SECONDO LA TEORIA ELETTROMAGNETICA DELLA LUCE; PEL PROF. GIUSEPPE BASSO.

I.

In alcuni miei lavori precedenti, e segnatamente in quello avente per titolo: *Studi sulla riflessione cristallina*, 1881 [1]), esaminai le leggi principali che governano la riflessione del moto luminoso alla superficie di un mezzo birifrangente. Assunsi allora come guida la teoria meccanica della luce svolta da A. Fresnel, aggiungendovi soltanto alcuni postulati che non ne modificano punto l'indole essenziale e che, per altra parte, non sono contraddetti da alcun fatto sperimentale. Recentemente la lettura di una pregevole monografia del Dott. O. Tumlirz [2]) richiamò la mia attenzione sullo stesso argomento e m' invogliò a prendere la teoria elettromagnetica della luce come guida nello studio dei fenomeni che accompagnano il passaggio della luce da un mezzo isotropo in uno birifrangente. Però limito, per ora, il mio esame a taluno dei casi speciali di cui mi ero già anteriormente occupato seguendo l'altra via e sui quali anzi tentai pure di fare verificazioni sperimentali.

Il desiderio di chiarezza mi consiglia a prender le mosse da alcune note proposizioni generali, le quali scaturiscono direttamente dal concetto fondamentale che informa la teoria elettromagnetica della luce.

II.

Abbiasi un mezzo perfettamente coibente, omogeneo, isotropo o non, il quale occupi un campo elettrico od elettromagnetico determinato dalla presenza di masse elettriche o magnetiche comunque distribuite nello spazio. Trovandosi tale mezzo nella condizione che vien chiamata di polarizzazione dielettrica, devesi

1) *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, serie II, t. XXXIV.
2) *Die elektromagnetische Theorie des Lichtes*. Leipzig, 1883.

considerare ogni suo punto (x, y, z) come appartenente ad un cilindro elementare le cui basi giaciono su due superficie equipotenziali successive e le cui generatrici sono dirette secondo le linee di forza; la forza elettromotrice E che in un istante qualunque agisce su questo cilindro genera sulle sue basi quantità eguali e di segno contrario di elettricità libera.

Il momento elettrico m che ne risulta e che rappresenta il rapporto della quantità d'elettricità libera sopra una base del cilindro all'area della base stessa è proporzionale alla forza E e si può scrivere:

$$m = \varepsilon \mathrm{E} ,$$

essendo ε la costante di polarizzazione dielettrica del mezzo.

Se questo mezzo è isotropo, la costante ε ha un valore indipendente dalla direzione della polarizzazione e questa direzione coincide dapertutto colla direzioue della forza E. Ciò corrisponde al concetto che, nella teoria meccanica della luce, ci formiamo di un mezzo etereo isotropo, quando ammettiamo che la forza elastica nascente in una particella d'etere che venga spostata dalla sua posizione d'equilibrio d'una quantità infinitesima è indipendente dalla direzione della linea di spostamento e che la direzione di tale forza coincide con quella dello spostamento.

Ma se il mezzo coibente è anisotropo la cosa va altrimenti. In tal caso si dimostra che esistono tre direzioni ortogonali (che corrispondono ai tre assi di elasticità ottica di Fresnel) le quali si possono condurre per qualunque punto del mezzo e sole godono della proprietà che, se la forza elettromotrice agisce in una di tali direzioni, con questa ultima coincide pure la direzione della polarizzazione che ne è la conseguenza. Se assumiamo queste tre direzioni come assi coordinati ed indichiamo con

$$\mathrm{E_x}, \mathrm{E_y}, \mathrm{E_z}$$

le componenti, secondo le medesime, della forza elettromotrice E applicata al punto (x, y, z), possiamo stabilire le relazioni:

$$f = \varepsilon_1 \mathrm{E_x}, \; g = \varepsilon_2 \mathrm{E_y}, \; h = \varepsilon_3 \mathrm{E_z}$$

nelle quali f, g, h designano i momenti elettrici che sarebbero dovuti alle tre componenti della forza E ove queste componenti

agissero singolarmente, e ε_1, ε_2, ε_3 sono i valori che la costante di polarizzazione dielettrica del mezzo possiede rispetto alle tre direzioni principali.

Chiamando ϕ la funzione potenziale, calcolata sul punto (x, y, z) di tutta l'elettricità libera esistente nel mezzo in virtù della polarizzazione, si ha pure

$$E_x = \frac{d\phi}{dx}, \quad E_y = \frac{d\phi}{dy}, \quad E_z = \frac{d\phi}{dz}.$$

Inoltre si trova facilmente che la densità dell'elettricità positiva libera sopra una base dell'elemento di volume a cui quel punto appartiene si può rappresentare con

$$-\left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right),$$

od anche, in virtù del teorema di Poisson, con

$$\frac{\Delta\phi}{4\pi},$$

dove il segno Δ indica l'operazione:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

e s'intende che il punto (x, y, z) si trovi entro il mezzo. Se questo punto appartiene alla superficie separante due mezzi coibenti diversi e la normale in esso alla superficie di separazione fa cogli assi coordinati gli angoli λ, μ, ν, la densità elettrica è espressa da

$$(f - f')\cos\lambda + (g - g')\cos\mu + (h - h')\cos\nu,$$

le quantità f', g', h' avendo per il secondo mezzo lo stesso significato che le f, g, h hanno per il primo.

III.

Nella teoria elettromagnetica della luce si ammette che il veicolo dell'energia luminosa sia per ordinario un mezzo soggetto a forze elettriche che lo mantengono continuamente nello stato

di polarizzazione dielettrica che fu testè accennato. Però si deve anche supporre che, in causa di variazioni incessanti e periodiche della forza applicata ad ogni elemento di volume (x, y, z), i momenti elettrici f, g, h relativi alle tre direzioni principali subiscono anch'essi variazioni continue e periodiche. Per conseguenza, ciascun cilindro elementare è sede di una corrente elettrica d'intensità variabile diretta secondo il suo asse, per cui attraverso ad ogni sezione del cilindro passa nel tempo dt una quantità di elettricità, le cui componenti secondo le tre direzioni principali e riferite all'unità di superficie sono:

$$\frac{df}{dt}dt, \ \frac{dg}{dt}dt, \ \frac{dh}{dt}dt.$$

Porrò per brevità:

$$u = \frac{df}{dt}, \quad v = \frac{dg}{dt}, \quad w = \frac{dh}{dt}$$

dove u, v, w si possono chiamare le componenti del flusso elettrico riferito all'unità superficiale ed attraversante, nel tempo dt, il cilindro elementare (x, y, z).

Ricordando la duplice espressione, dianzi accennata, che si può dare alla densità elettrica, ne segue la relazione:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{4\pi}\frac{d.\Delta\phi}{dt}$$

nella quale le quantità sono misurate nel sistema elettrostatico. Vedesi facilmente che, se si indica con e il numero delle unità elettrostatiche di elettricità contenute in un'unità elettromagnetica, l'equazione precedente, quando si adotti il sistema di misura elettromagnetico, diventa:

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{2\pi e^2}\frac{d.\Delta\phi}{dt}$$

Ciò posto, prendansi in seno al coibente polarizzato due elementi di corrente di lunghezze ds, ds', d'intensità J, J' e distanti l'un dall'altro della quantità r. Il potenziale elettrodinamico elementare si può, secondo Clerk Maxwell, porre sotto la forma:

$$P = JJ' \left[\frac{\cos(ds, ds')}{r} + \frac{1}{2} \frac{d^2 r}{ds\, ds'}\right] ds\, ds' .$$

Per formare il potenziale elettrodinamico dell' intero sistema di correnti sopra se stesso e dedurne quindi le componenti della forza elettrica applicata in ogni istante ad un punto qualunque del mezzo si può ragionare nel modo seguente. Siano dx, dy, dz le proiezioni, secondo gli assi, della corrente elementare ds di posizione (x, y, z) per la quale le componenti del flusso elettrico sono u, v, w; per un altro elemento ds' di corrente di posizione (x', y', z') siano $dx', dy'\, dz'$ le sue proiezioni e u', v', w' le componenti del relativo flusso elettrico. Sostituiamo a ciascuno dei due elementi le sue proiezioni; avremo così al posto dell'elemento ds il sistema delle tre correnti elementari di lunghezze dx, dy, dz colle intensità rispettive:

$$u\, dy\, dz , \quad v\, dx\, dz , \quad w\, dx\, dy ;$$

e invece dell'elemento ds' intendiamo poste le sue tre proiezioni dx', dy', dz' colle rispettive intensità:

$$u'\, dy'\, dz' , \quad v'\, dx'\, dz', \quad w'\, dx'\, dy' .$$

Applicando ora l'espressione precedente di P all'elemento dx considerato successivamente in relazione con ciascuno degli elementi dx', dy', dz' e tenendo anche conto della relazione:

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 ,$$

si ottiene per l' espressione del potenziale elettrodinamico sopra dx di tutto il sistema:

$$- F\, u\, dx\, dy\, dz ,$$

purchè si ponga:

$$F = -\iiint dx'\, dy'\, dz' \left[\frac{u'}{r} + \frac{u'}{2} \frac{d^2 r}{dx'\, dx} + \frac{v'}{2} \frac{d^2 r}{dy'\, dx} + \frac{w'}{2} \frac{d^2 r}{d^2 z'\, dx}\right] .$$

In modo analogo si ottiene il potenziale sopra dy di tutto il sistema espresso da

$$- G\, v\, dx\, dy\, dz ,$$

dove si ha:

$$G = -\iiint dx'\, dy'\, dz' \left[\frac{v'}{r} + \frac{u'}{2} \frac{d^2 r}{dx'\, dy} + \frac{v^2}{2} \frac{d^2 r}{dy'\, dy} + \frac{w'}{2} \frac{d^2 r}{dz'\, dy}\right] .$$

E similmente sopra l'elemento dz si ha il potenziale del sistema

$$-\mathrm{H}\, w\, dx\, dy\, dz\,,$$

intendendo che sia:

$$\mathrm{H} = -\iiint dx'\, dy'\, dz' \left[\frac{w'}{r} + \frac{u'}{2}\frac{d^2 r}{dx'\, dz} + \frac{v'}{2}\frac{d^2 r}{dy'\, dz} + \frac{w'}{2}\frac{d^2 r}{dz'\, dy}\right].$$

La conoscenza delle tre funzioni F, G, H serve a risolvere tutte le quistioni relative alle azioni esercitate dal sistema di flussi elettrici che costituiscono lo stato periodicamente variabile di polarizzazione dielettrica del mezzo coibente. Quì basterà accennare le seguenti più importanti e già conosciute proprietà di tali funzioni:

1° Il potenziale elettrodinamico dello intiero sistema di correnti su se stesso ha per espressione:

$$-\frac{1}{2}\iiint dx\, dy\, dz\, (\mathrm{F}u + \mathrm{G}v + \mathrm{H}w)\;;$$

2° Se si tiene conto dell' equazione (1) e si applica il teorema di Green, le tre funzioni anzidette si possono mettere sotto la forma:

$$\mathrm{F} = \iiint \frac{u'}{r}\, dx'\, dy'\, dz' + \frac{1}{2\pi e^2}\frac{d^2}{dx\, dt}\iiint \frac{\phi}{r}\, dx'\, dy'\, dz\;;$$

$$\mathrm{G} = \iiint \frac{v'}{r}\, dx'\, dy'\, dz' + \frac{1}{2\pi e^2}\frac{d^2}{dy\, dt}\iiint \frac{\phi}{r}\, dx'\, dy'\, dz'\;;$$

$$\mathrm{H} = \iiint \frac{w'}{r}\, dx'\, dy'\, dz' + \frac{1^2}{2\pi e^2}\frac{d^2}{dz\, dt}\iiint \frac{\phi}{r}\, dx'\, dy'\, dz'\,.$$

3° Applicando a queste tre espressioni il teorema di Poisson, se ne deduce:

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta \mathrm{F} = 4\pi u + \dfrac{2}{e^2}\dfrac{d^2\phi}{dx\, dt}\;; \\[2ex] \Delta \mathrm{G} = 4\pi v + \dfrac{2}{e^2}\dfrac{d^2\phi}{dy\, dt}\;; \\[2ex] \Delta \mathrm{H} = 4\pi w + \dfrac{2}{e^2}\dfrac{d^2\phi}{dz\, dt}\,. \end{cases}$$

4° Esiste la relazione:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0\,.$$

5° Le derivate parziali $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$, $\frac{dH}{dt}$ sono le componenti della forza elettromotrice che, alla fine del tempo t, agisce sull'elemento di posizione (x, y, z) in virtù dell'induzione esercitata su questo elemento dall'intero sistema di correnti.

Tale sistema, in ogni punto del quale la forza elettromotrice è variabile periodicamente col tempo, si può considerare come costituito da correnti lineari chiuse, d'ampiezza infinitesima, e quindi tali che la quantità totale di elettricità moventesi nell'interno d'una superficie chiusa qualunque rimane costante. Questa condizione permette di dare una forma relativamente semplice alle note equazioni generali del movimento dell'elettricità nei corpi in riposo [1]). Considerando dapprima il caso in cui il mezzo è isotropo, per cui si abbia:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon\,,$$

le dette equazioni si possono scrivere così:

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}\Delta F&=4\pi\varepsilon\frac{d^2F}{dt^2}\\ \Delta G&=4\pi\varepsilon\frac{d^2G}{dt^2}\\ \Delta H&=4\pi\varepsilon\frac{d^2H}{dt^2}\end{aligned}\right.$$

È però da avvertire che se il mezzo fosse magnetico, e perciò capace di polarizzazione magnetica, si dovrebbe moltiplicare per $1+4\pi q$ il secondo membro di ciascuna delle equazioni (3), essendo q la costante di polarizzazione magnetica del mezzo.

(Continua)



1) V. il citato lavoro di Tulmlitz a pag. 54 e seg., ed anche: *A treatise on electricity and magnetism*, by J. Clerk Maxwell, vol. 2°, art. 784.

SOPRA L'EQUILIBRIO DI UN CORPO ELASTICO ISOTROPO;
DEL DOTT. CARLO SOMIGLIANA [1].

Se ora poniamo

$$\psi = (z+z')\log(z+z'+r') - r'$$

abbiamo

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{1}{r'} \qquad \Delta_2\,\psi = 0$$

e la funzione ψ è continua e finita insieme alle sue derivate in S. Sostituendo questa espressione di $\frac{1}{r'}$ nelle equazioni precedenti, esse prendono la forma di equazioni, i cui integrali sono noti [2]. Difatti se poniamo

$$\xi_1' = -\frac{(2\lambda+\mu)(1-\alpha')}{2\mu}\, z\, \frac{d^2\psi}{dx dz} + \frac{\alpha'}{2}\frac{d\psi}{dx}$$

$$\eta_1' = -\frac{(2\lambda+\mu)(1-\alpha')}{2\mu}\, z\, \frac{d^2\psi}{dy dz} + \frac{\alpha'}{2}\frac{d\psi}{dy}$$

$$\zeta_1' = -\frac{(2\lambda+\mu)(1-\alpha')}{2\mu}\, z\, \frac{d^2\psi}{dz^2} + \left[\frac{(2\lambda+\mu)(1-\alpha')}{2\mu} - \frac{\alpha'}{2}\right]\frac{d\psi}{dz},$$

le equazioni (18)' e le prime due delle (19)' sono soddisfatte qualunque sia α'; l'ultima delle (19)' dà

$$\alpha' = \frac{2\lambda-\mu}{2\lambda+\mu}$$

Quindi sostituendo nelle formule precedenti, abbiamo

$$\xi_1 = -z\frac{d^3\psi}{dx^2 dz} + \frac{\alpha'}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{r'}$$

$$\eta_1 = -z\frac{d^3\psi}{dx dy dz} + \frac{\alpha'}{2}\frac{d^2\psi}{dx dy}$$

$$\zeta_1 = -z\frac{d^3\psi}{dx dz^2} - \left(\frac{\alpha'}{2} - 1\right)\frac{d^2\psi}{dx dz}.$$

(1) *Continuazione.* Vedi pag. 272 del volume precedente.

(2) V. Cerruti, *Ricerche sopra l'equilibrio* ec.

Applicando ora il teorema del prof. Betti ai due gruppi di spostamenti $u\ v\ w$, $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ otteniamo

$$(20)\qquad \mu\int\limits_\sigma\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dz}-w\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right)d\sigma=\frac{\alpha'}{2}\int\limits_\sigma\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\mathrm{L}+\frac{d^2\psi}{dxdy}\mathrm{M}-\frac{d^2\psi}{dxdz}\mathrm{N}\right)d\sigma$$

$$+\int\limits_\sigma\frac{d^2\psi}{dxdz}\mathrm{N}d\sigma+\int\limits_\sigma\frac{\mathrm{L}}{r'}d\sigma+\rho\int\limits_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}\xi_1+\mathrm{Y}\eta_1+\mathrm{Z}\zeta_1)\,d\mathrm{S}\,.$$

Scambiando ora nelle formule precedenti ξ con η, x con y, otteniamo

$$\xi_2=-z\frac{d^3\psi}{dydxdz}+\frac{\alpha'}{2}\frac{d^2\psi}{dxdy}$$

$$\eta_2=-z\frac{d^3\psi}{dy^2dz}+\frac{\alpha'}{2}\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{1}{r'}$$

$$\zeta_2=-z\frac{d^3\psi}{dydz^2}-\left(\frac{\alpha'}{2}-1\right)\frac{d^2\psi}{dydz}$$

e applicando il solito teorema

$$(21)\qquad \mu\int\limits_\sigma\left(v\frac{d\frac{1}{r}}{dz}+w\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right)d\sigma=\frac{\alpha'}{2}\int\limits_\sigma\left(\frac{d^2\psi}{dxdy}\mathrm{L}+\frac{d^2\psi}{dy^2}\mathrm{M}-\frac{d^2\psi}{dydz}\mathrm{N}\right)d\sigma$$

$$+\int\limits_\sigma\frac{d^2\psi}{dydz}\mathrm{N}\,d\sigma+\int\limits_\sigma\frac{\mathrm{M}}{r'}d\sigma+\rho\int\limits_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}\xi_2+\mathrm{Y}\eta_2+\mathrm{Z}\zeta_2)\,d\mathrm{S}\,.$$

Con metodo analogo a quello di cui ci siamo ora serviti per determinare le $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$, otteniamo i seguenti valori per le $\xi_3\ \eta_3\ \zeta_3$

$$\xi_3=-z\frac{d^2\phi}{dxdz}-\frac{1}{2\alpha}\frac{d\phi}{dx}$$

$$\eta_3=-z\frac{d^2\phi}{dydz}-\frac{1}{2\alpha}\frac{d\phi}{dy}$$

$$\zeta_3=-z\frac{d^2\phi}{dz^2}+\frac{1}{2\alpha}\frac{d\phi}{dz}$$

e otteniamo quindi

$$(22)\quad \mu\int_\sigma\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+v\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+w\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)d\sigma=-\frac{1}{2\alpha}\int_\sigma\left(\frac{d\Phi}{dx}L+\frac{d\Phi}{dy}M-\frac{d\Phi}{dz}N\right)d\sigma$$

$$+\rho\int_S(X\xi_3+Y\eta_3+Z\zeta_3)\,dS\,.$$

Le formule (20) (21) (22) bastano per determinare le $u\ v\ w$ in questo caso; da esse derivando e sommando si deduce il valore della Θ corrispondente, che già abbiamo trovato in altro modo (17).

Nel caso in cui si conoscono i valori superficiali delle $u\ v\ w$, sostituendo nelle (11) i valori dati dalle (12) (13) (14) (16), le espressioni che si ottengono per queste funzioni risultano composte di due parti; la prima rappresenta gli spostamenti prodotti nel corpo S dagli spostamenti superficiali dati, quando le forze X, Y, Z sono nulle; la seconda invece gli spostamenti prodotti dalle forze X, Y, Z quando la superficie $z=0$ è fissa.

Parimenti nel secondo caso le espressioni delle $u\ v\ w$ risultano composti di una prima parte, che rappresenta gli spostamenti prodotti dalle forze L M N quando si ha $X=Y=Z=0$, e di una seconda parte che rappresenta gli spostamenti prodotti alle forze X, Y, Z quando sulla superficie $z=0$ non agiscono forze.

Nei due casi le prime parti delle espressioui delle $u\ v\ w$ si possono porre sotto una forma alquanto semplice, che fu già trovata dal prof. Cerruti, e che qui non starò a ripetere. Consideriamo invece le seconde; chiamandole $u_1\ v_1\ w_1$ nel primo caso, $u_1'\ v_1'\ w_1'$ nel secondo, abbiamo

$$(23)\quad \begin{aligned}
4\pi\mu u_1&=0-\alpha\frac{d\Omega}{dx'}+(2\lambda+\mu)\frac{d}{dx'}\int_{S_1}\frac{\Theta_1}{r_1}\,dS_1\\
4\pi\mu v_1&=P-\alpha\frac{d\Omega}{dy'}+(2\lambda+\mu)\frac{d}{dy'}\int_{S_1}\frac{\Theta_1}{r_1}\,dS_1\\
4\pi\mu w_1&=Q+\alpha\frac{d\Omega}{dz'}+(2\lambda+\mu)\frac{d}{dz'}\int_{S_1}\frac{\Theta_1}{r_1}\,dS_1
\end{aligned}$$

ove si è posto

$$\Omega = \rho \int_S z \left(X \frac{d\phi}{dx} + Y \frac{d\phi}{dy} + Z \frac{d\phi}{dz} \right) dS$$

$$O = \rho \int_S X \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) dS \quad P = \rho \int_S Y \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) dS \quad Q = \rho \int_S Z \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) dS$$

e inoltre

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2 + (z_1 - z')^2} \qquad dS_1 = dx_1 dy_1 dz_1$$

Considerando ora le O, P, Q, Ω come funzioni delle x_1 y_1 z_1 anzichè delle x' y' z', abbiamo dalla (16)

$$8\pi(\lambda + \mu)\Theta_1 = \frac{dO}{dx_1} + \frac{dP}{dy_1} + \frac{dQ}{dz_1} + 2\alpha \frac{d^2\Omega}{dz_1^2}$$

La funzione $z' \dfrac{d\Omega}{dz'}$ è monodroma finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto S e si annulla all'infinito; quindi si ha

$$4\pi z' \frac{d\Omega}{dz'} = -\int_{\sigma_1} \frac{d\Omega_1}{dz_1} \frac{d\sigma_1}{r_1} - 2 \int_{S_1} \frac{d^2\Omega_1}{dz_1^2} \frac{dS_1}{r_1} .$$

Abbiamo inoltre, per note proprietà delle funzioni potenziali,

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz'} \int_{\sigma_1} \frac{d\Omega_1}{dz_1} \frac{d\sigma}{r_1} = -\frac{d\Omega}{dz'} = -\rho \int_S z \left(X \frac{d\frac{1}{r'}}{dx} + Y \frac{d\frac{1}{r'}}{dy} + Z \frac{d\frac{1}{r'}}{dz} \right) dS$$

e, integrando fra ∞ e z', poichè

$$\int_\infty^{z'} \frac{d\frac{1}{r'}}{dx} dz' = \int_\infty^{z'} \frac{d^2\phi}{dx dz'} dz' = \frac{d\phi}{dx}, \quad \text{ec.},$$

si ottiene

$$\int_{\sigma_1} \frac{d\Omega_1}{dz_1} \frac{d\sigma_1}{r_1} = -2\pi\Omega;$$

e perciò

$$-2\int_{S_1}\frac{d^2\Omega_1}{dz_1^2}\frac{dS_1}{r_1}=2\pi\left(2z'\frac{d\Omega}{dz'}-\Omega\right).$$

Ponendo ora

$$\Delta=\int_{S_1}\left(\frac{dO}{dx_1}+\frac{dP}{dy_1}+\frac{dQ}{dz_1}\right)\frac{dS_1}{r_1}$$

abbiamo

$$\int_{S_1}\frac{\Theta_1}{r_1}\,dS_1=\frac{1}{8\pi(\lambda+\mu)}\left[\Delta+2\pi\alpha\left(\Omega-2z'\frac{d\Omega}{dz'}\right)\right];$$

e quindi sostituendo nelle (23)

$$u_1=\frac{O}{4\pi\mu}+\frac{2\lambda+\mu}{16\pi(\lambda+\mu)\mu}\left[\frac{1}{2\pi}\frac{d\Delta}{dx'}-\frac{d\Omega}{dx'}-2\alpha z'\frac{d^2\Omega}{dx'\,dz'}\right]$$

$$v_1=\frac{P}{4\pi\mu}+\frac{2\lambda+\mu}{16\pi(\lambda+\mu)\mu}\left[\frac{1}{2\pi}\frac{d\Delta}{dy'}-\frac{d\Omega}{dy'}-2\alpha z'\frac{d^2\Omega}{dy'\,dz'}\right]$$

$$w_1=\frac{Q}{4\pi\mu}+\frac{2\lambda+\mu}{16\pi(\lambda+\mu)\mu}\left[\frac{1}{2\pi}\frac{d\Delta}{dz'}+\frac{d\Omega}{dz'}-2\alpha z'\frac{d^2\Omega}{dz'^2}\right].$$

Nel secondo caso ponendo

$$O=\rho\int_S X\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha r'}\right)dS\quad P=\rho\int_S Y\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha r'}\right)dS\quad Q=\rho\int_S Z\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha r'}\right)dS$$

abbiamo

$$8\pi(\lambda+\mu)\,\Theta=\frac{dO}{dx'}+\frac{dP}{dy'}+\frac{dQ}{dz'}+2\frac{d^2\Omega}{dz'^2}$$

e quindi

$$\int_{S_1}\frac{\Theta_1}{r_1}\,dS_1=\frac{1}{8\pi(\lambda+\mu)}\left[\Delta'+2\pi\left(2z'\frac{d\Omega}{dz'}-\Omega\right)\right]$$

ove

$$\Delta'=\int_{S_1}\left(\frac{dO}{dx_1}+\frac{dP}{dy_1}+\frac{dQ}{dz_1}\right)\frac{dS_1}{r_1}$$

e per le u_i' v_i' w_i' abbiamo

$$u_i' = \frac{O'}{4\pi\mu} - \frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{dT}{dx'} + \frac{2\lambda+3\mu}{16\pi(\lambda+\mu)\mu}\frac{d\Omega}{dx'} + \frac{2\lambda+\mu}{8\pi(\lambda+\mu)\mu}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{d\Delta'}{dx'} + z'\frac{d^2\Omega}{dx'dz'}\right] + \frac{dA}{dz'} - \frac{dC}{dx'}$$

$$v_i' = \frac{P'}{4\pi\mu} - \frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{dT}{dy'} + \frac{2\lambda+3\mu}{16\pi(\lambda+\mu)\mu}\frac{d\Omega}{dy'} + \frac{2\lambda+\mu}{8\pi(\lambda+\mu)\mu}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{d\Delta}{dy'} + z'\frac{d^2\Omega}{dy'dz'}\right] + \frac{dB}{dz'} - \frac{dC}{dy'}$$

$$w_i' = \frac{Q'}{4\pi\mu} - \frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{dT}{dz'} - \frac{2\lambda+3\mu}{16\pi(\lambda+\mu)\mu}\frac{d\Omega}{dz'} + \frac{2\lambda+\mu}{8\pi(\lambda+\mu)\mu}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{d\Delta}{dz'} + z'\frac{d^2\Omega}{dz'^2}\right]$$

ove si è posto

$$O' = \rho\int_S \frac{X}{r}\,dS \quad P' = \rho\int_S \frac{Y}{r}\,dS \quad Q' = \rho\int_S \frac{Z}{r}\,dS$$

$$A = \rho\int_S X\phi\,dS \quad B = \rho\int_S Y\phi\,dS \quad C = \rho\int_S Z\phi\,dS$$

$$T = \rho\int_S\left(\frac{d\psi}{dx}X + \frac{d\psi}{dy}Y + \frac{d\psi}{dz}Z\right)dS\,.$$

(*Continua*)



IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATO PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

da E. BETTI e R. FELICI

Terza serie Tomo XVIII.

SETTEMBRE e OTTOBRE

(Pubblicato il 21 Novembre 1885)

1885

PISA

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

INDICE

Revisione di alcune misure calorimetriche fondamentali — Nota preliminare del Prof. Adolfo Bartoli ed Enrico Stracciati . . . pag. 97

Sopra alcune relazioni stabilite dal sig. De Heen, fra la dilatabilità e il punto di ebullizione dei composti di una stessa serie omologa — Nota dei Prof. A. Bartoli ed E. Stracciati . . . „ 107

Sulla dilatazione termica di un miscuglio di due liquidi, dedotta dalle dilatazioni dei componenti, combinando una nostra formula con un'altra del sig. Pawlewski — Nota dei Prof. A. Bartoli ed E. Stracciati . . . „ 111

Ricerche teoriche e sperimentali sul generatore secondario Gaulard e Gibbs — Prof. Galileo Ferraris. *(Continuaz. e fine)* . . . „ 115

Fenomeni di riflessione cristallina interpretati secondo la teoria elettromagnetica della luce — Prof. Giuseppe Basso. *(Continuaz. e fine)* „ 129

Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici — Nota del Prof. E. Beltrami „ 145

Sulla velocità dei raggi polarizzati circolarmente nell'interno di un corpo dotato di potere rotatorio — Memoria del Prof. Augusto Righi. . „ 156

Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo — Dott. Carlo Somigliana. *(Continuaz.)* „ 165

Studi sul lavoro chimico interno della pila. — Prof. C. Toscani . „ 183

Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità. — Memoria del Prof. Eugenio Beltrami. . . „ 199

RIVISTA

Sunti di A. Stefanini. — **Ann. der Phys. und chem. von G. Wied.** Vol. XXIV, 1885. —

O. Lehmann. Sul punto di fusione di corpi in contatto fra loro e sull'elettrolisi dell'ioduro d'argento . . . „ 166

W. von Bezold. Su una nuova specie di figure di coesione . „ ivi

L. Boltzmann. Sulla possibilità di fondare una teoria cinetica dei gas su forze solamente attrattive . . „ 167

O. Chwolson. Sulla calibrazione delle cassette di resistenza Siemens e Halske „ ivi

F. Kohlrausch. Conducibilità elettrica dell'acqua distillata nel vuoto . „ ivi

G. Kirchhoff. Sulle variazioni di forma che subisce un solido elastico quando si polarizza magneticamente o dielettricamente . . „ 168

A. Schuster. Sulla scarica elettrica nei gas . . „ ivi

E. Goldstein. Sulla conducibilità elettrica nel vuoto . . „ ivi

W. Siemens. Contribuzioni alla teoria del magnetismo . „ 169

H. Hertz. Sulle dimensioni del polo magnetico nei vari sistemi di misura „ 171

E. Kettler. Le costanti ottiche dei mezzi magnetici . . „ ivi

E. von Fleischl. La doppia refrazione della luce nei fluidi . . „ ivi

W. Voigt. Sulla determinazione dell'indice di refrazione dei mezzi assorbenti „ 172

W. Voigt. Sulla teoria della riflessione e della refrazione alla superficie di separazione di mezzi trasparenti cristallini . . . „ ivi

L. Arons. Determinazione della costante di Verdet in misura assoluta . „ 173

REVISIONE DI ALCUNE MISURE CALORIMETRICHE FONDAMENTALI; NOTA PRELIMINARE DEI PROFESSORI ADOLFO BARTOLI ED ENRICO STRACCIATI.

(Letta alla *R. Acc. dei Lincei* nella seduta del 21 Giugno 1885).

I. Ogni misura calorimetrica in cui l'acqua che riempie il calorimetro non prova un riscaldamento da 0° ad 1°, richiede una correzione, per far la quale, è necessario conoscere esattamente la legge con cui varia il calorico specifico dell'acqua: e su questa legge appunto regna la più grande incertezza, visto il grande disaccordo fra i resultati dei diversi sperimentatori. E di tale incertezza risentono tutte le misure calorimetriche e se ciò è di poco danno nelle misure nelle quali non si può richiedere per ora molto rigore (come per es. pei dati di termochimica) è invece causa di grandi errori in altre misure come per es. nella determinazione dello equivalente meccanico del calore e nella misura del calore svolto da correnti continue nei circuiti metallici.

II. Il calore specifico dell'acqua a diverse temperature è stato studiato dal Regnault [1]), dal Bosscha [2]), dal Pfaundler e Platter [3]), dall'Hirn [4]), dal Jamin [5]), dall'Henrichsen [6]), dal Baumgartner [7]), dal Wüllner [8]), dalla sig. Stamo [9]), dal sig. Gerosa [10]), dal Rowland [11]), dal sig. A. W. Velten [12]), dal sig. Neesen [13]), dal sig. G. A. Liebig [14]). ecc.

1) *Ann. de Ch. et de Phys.* vol. 73 pag. 5, 1847.
2) *Pogg. Ann. Jubelband*, 549.
3) *Pogg. Ann.* CXL, s. 574, CXLI, s. 537.
4) *Comptes Rendus*, LXX, pag. 592, 831.
5) *Comptes Rendus*, LXX, pag. 661.
6) *Wiedemann Ann.* VIII, pag. 83.
7) Id. VIII, pag. 648.
8) Id. X, pag. 284.
9) M. Stamo, *Untersuchung über die spezifische Wärme des Wassers, Inaugural Dissertation*. Zurich; Druch von Zurcher und Furrer 1877 (Memoria gentilmente donataci dalla Biblioteca cantonale di Zurigo).
10) *Atti della R. Acc. dei Lincei*, vol. X, seduta del 24 Aprile 1885.
11) *On the mecanical Equivalent of Heat and on the variation of the specific heat of water* (Cambridge, John Wilson and son 1880) e *Appendix containing the comparison With Dr. Joule's thermometer;* Memorie gentilmente favoriteci dall'Autore.
12) *Annalen der Physik*, 1884 Bd. XXI, pag. 31-64.
13) *Annalen der Physik*, 1883 Bd. XVIII, pag. 369-387.
14) G. A. Liebig. *Variation de la chaleur spécifique de l'eau*, *American Journal*, vol. XXVI, 1883. — *Journal de Physique*, 1884, pag. 184.

Non è quì il luogo di parlare dei metodi tenuti da questi fisici e diremo soltanto: che in alcuni l'averé trascurato il confronto dei termometri col termometro ad aria toglie il valore ai resultati, e che in altri si può rimproverare lo scarso numero di esperienze fatte in proposito (Rowland, *on the mec. ecc.* pag. 123).

Noi abbiamo ripreso le esperienze sul calore specifico dell'acqua, inspirandoci più che in nessun altro nei lavori del Regnault, non senza tener assai conto di quelli del Rowland e di altri ancora. Insieme con l'acqua abbiamo voluto ripetere lo stesso studio sul mercurio, il quale fu già proposto ed impiegato come liquido calorimetrico.

III. Per determinare il calore specifico dell'acqua noi abbiamo impiegato diversi metodi: in tutti però la capacità dei calorimetri e perciò anche la massa del liquido fu assai considerevole.

1. Aggiungendo all'acqua del calorimetro una determinata massa di acqua a zero gradi (Rowland, *l. c.* pag. 123) o a 100° (Regnault, Rowland).

2. Aggiungendo all'acqua del calorimetro una determinata massa di acqua a temperatura ben determinata, ma diversa da quella del calorimetro (Regnault, Gerosa ecc.).

3. Metodo del raffreddamento dell'acqua nel vuoto, l'acqua essendo continuamente agitata ecc. (Regnault, Hirn).

4. Facendo cadere nell'acqua del calorimetro delle palline metalliche scaldate a + 100° impiegando palline non alterabili nell'acqua e di cui si conosce il calorico specifico vero a tutte le temperature fra 0° e 35° (Regnault). Questo metodo fu da noi adoperato anche impiegando mercurio per liquido calorimetrico e facendovi cadere delle palline di platino.

Con questi metodi noi abbiamo eseguito oltre tremila esperienze nelle quali abbiamo impiegato già quattro anni, lavorandoci indefessamente, senza interruzione, e con l'aiuto di una schiera di giovani fisici i quali ci hanno molto aiutato nelle esperienze preliminari e nelle operazioni accessorie: occorrerà però ancora qualche tempo perchè si possano dire finiti.

IV. Ecco un cenno brevissimo degli apparecchi e strumenti impiegati in queste esperienze:

Calorimetri. — Per la disposizione sono tali e quali li ado-

pera il Berthelot (*Mécanique chimique*, tom. I pag. 140) vale a dire che vi è l'involucro contenente l'acqua, il quale in certe esperienze ne conteneva qualche ettolitro, vi è l'involucro riflettore di argento ecc. ecc. salvo le dimensioni che nei calorimetri da noi adoperati erano grandi e talvolta gigantesche. Prima di costruire i calorimetri fu determinato il calore specifico medio fra 0° e + 35° (data da una stufa ad etere) dei metalli in lastra coi quali furono poi fatti i calorimetri e gli agitatori. Furon fatte oltre 20 determinazioni per ciascuna lastra e nelle correzioni si adoperò il valore medio trovato. I calorimetri adoperati furono di lastra di ottone (presa per tutti dallo stesso rotolo) di lastre fine di nichel puro (dal sig. T. Schuchardt, Goerlitz) di ottone perfettamente nichelato (Zambelli a Torino) di ferro lucidissimo senza saldature (sig. R. Turchini, Firenze) e di platino tutto di un pezzo eseguiti a Londra (coll'intermezzo del sig. A. Dall'Eco). I calorimetri di ferro e di platino servirono pel mercurio. I calorimetri erano chiusi e si aprivano solo un istante per gettarvi l'acqua fredda o le palline calde. Le loro capacità furono da $^1/_3$ di litro fino a 10 litri. Oltre questi calorimetri abbiamo anche quelli Bunsen già studiati da noi in altra occasione [1]).

Agitatori. — Eran fatti delle stesse lastre dei calorimetri. Agivano con un moto periodico di sollevamento e di abbassamento, rimanendo sempre immersi nell'acqua: la loro forma partecipava a quella dell'agitatore di Regnault ed a quella dell'agitatore di Berthelot (*loco citato* pag. 145, fig. 5), vale a dire che producevano nell'acqua un moto di trasporto verticale ed uno di rotazione intorno all'asse del calorimetro: essi venivano mossi per mezzo di un filo e di carrucole da un inserviente che stava a distanza dal calorimetro.

Stufe a vapore. — Non differiscono molto da quella di Regnault ultimo modello, salvo diverse modificazioni e salvo le dimensioni che nelle nostre stufe sono gigantesche. Il vapore circola per un doppio involucro ed è in perfetta comunicazione con l'atmosfera per mezzo di due grossi e corti tubi di piombo ben raffreddati. La camera di riscaldamento può contenere sin quattro

1) Vedi Bartoli e Stracciati, *Calore specifico della Mellite.* — *Nuovo Cimento* 1883 e *Gazzetta Chimica* 1884; nonchè Bartoli, *Determinazione dello equivalente meccanico del calore.* — *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, 1880.

chilogrammi di palline di rame: non si fa l'esperienza finchè il termometro sensibilissimo che è in contatto col corpo che si scalda non è perfettamente stazionario almeno da un'ora. Questa stufa fu costruita, dietro il nostro disegno, e dopo diversi tentativi, dal sig. Turchini meccanico di questo gabinetto di fisica.

Apparecchi per mantenere l'acqua a 0°. — L'acqua è in una boccia di nikel saldata a stagno purissimo di 3 a 4 litri di capacità: la boccia ha un collo larghissimo, ha un grande agitatore ed è munita di doppia parete, acciò prendendola con la mano rivestita di uno spesso guanto di lana, non si comunichi il calore all'acqua. Porta un termometro a *centesimi di grado* (il centesimo ampio un millimetro) appositamente costruito dal Müller, successore di Geissler a Bonn; la boccia si tiene circondata da ghiaccio minutamente frantumato, entro una cassa di costruzione assai complicata, la quale verrà descritta minutamente insieme con la figura, nelle memorie che pubblicheremo. La cassa contiene diversi quintali di ghiaccio e circonda completamente la boccia, in modo che solo emerga la colonna di mercurio del termometro tanto quanto basta per leggere bene la temperatura: la lettura del termometro si fa dopo avere ben bene agitata l'acqua della boccia mediante un grande agitatore che non differisce molto da quello che è nell'involucro ad acqua del calorimetro di Berthelot.

Gli apparecchi per mantenere l'acqua a 0° sono due: l'acqua non raggiunge la temperatura di 0° che dopo molte ore: l'esperienza non si fa mai se non dopo 24 ore almeno di soggiorno della boccia di nichel nella ghiacciaia.

Per leggere le temperature dell'acqua che si vuol portare a zero, abbiamo oltre due termometri Geissler a centesimi, diversi altri termometri di sensibilità assai più squisita. Ne abbiamo uno costruito secondo le nostre indicazioni dal sig. Ulisse Marchi impiegato all'Osservatorio Meteorologico di Firenze, il qual termometro dà direttamente i cinquecentesimi, i quali sono così ampii, che con una lente si possono apprezzare agevolmente anche i cinquemillesimi di grado $^1/_{5000}$ ma solo in vicinanza di zero.

Bilancie e pesiere. — Le bilancie adoperate in queste esperienze furono:

1° Una bilancia di Deleuil di Parigi, fatta per pesare og-

getti voluminosi: portata dieci chilogrammi: sensibilità 2 milligrammi: acquistata nel 1881 per questo gabinetto fisico.

2° Bilancia di Rueprecht di Vienna: portata due chilogrammi: sensibilità un milligrammo: acquistata nel 1882 per questo gabinetto fisico.

3° Bilancia di Sartorius di Gottinga: portata due chilogrammi: sensibilità un quinto di milligrammo (ed anche più): acquistata nel 1883 per questo gabinetto fisico.

4° Una bilancia di sostituzione di Reimann procurataci dal sig. Dall'Eco nel 1883: portata 200 grammi: sensibilità $^1/_{10}$ di milligrammo.

Le pesiere erano due: l'una di Deleuil sino a dieci chilogrammi; l'altra di Rueprecht sino a 2 chilogrammi: furono studiate accuratamente e si era costruita una tavola di correzioni. I pesi erano riferiti al chilogrammo campione di platino esistente in Roma al R. Ministero di Agricoltura Industria e Commercio, al quale fu paragonato il chilogrammo campione di questo gabinetto di Fisica: e di questo confronto ringraziamo molto il chiarissimo prof. Pisati dell'Università di Roma [1]).

Termometri calorimetrici, termometri ad aria, barometri, catetometri. — I termometri calorimetrici formavano tre serie complete da $-5°$ a $+40°$, erano tutti a cinquantesimi di grado, ed assai ampi perchè coll'ottimo cannocchiale di Amici che noi impiegavamo, si potette agevolmente stimare il decimo di centesimo, ossia il millesimo di grado ed anche di più. I termometri calorimetrici erano fortemente rischiarati di dietro da una piccola finestra alta sessanta centimetri e larga un decimetro, fatta praticare in corrispondenza al termometro: la finestra era poi chiusa con un foglio di carta oliata, sovrapposta al cristallo; il resto della stanza si teneva illuminata tanto quanto bastava per scorgere gli oggetti ecc.; così nel campo del cannocchiale non si aveva altra luce che quella che illuminava il termometro e le letture si facevano ottimamente. I termometri calorimetrici provenivano dal Baudin, dal Geissler e dal Tonnellot: essi a nostra richiesta avevano inciso sul vetro il peso del bulbo di vetro, e il peso del mercurio, ed inoltre ci avevano mandato per ogni termometro un pezzetto del vetro del cannello capillare, sul

1) È inutile dire che tutte le nostre pesate erano ridotte al vuoto.

quale noi determinammo il calorico specifico medio fra 0° e + 35° e il peso specifico.

Questi termometri furono confrontati con termometri normali 0° - 100° a decimi di grado, delle segnenti provenienze. Kew, R. Osservatorio (avuto per mezzo del sig. G. Wippley); Baudin (Parigi), fu Dott. Geissler di Bonn (1876); Tonnellot (Parigi); Fuess (Berlino). È inutile dire che nell'impiego dei termometri si usavano tutte le cautele che suggerisce la scienza moderna (Compara *Travaux et Memoires du Bureau International des poids et mesures*, t. I (Memorie del Pernet sui termometri a mercurio: come pure Crafts, *Les mesures thermomètriques ec. ec.*).

I termometri ad aria sono quattro: uno di Regnault molto semplice (costruttore Golaz): uno di Jolly ed uno di Recknagel (costruttore Miller di Jnnsbruck) ed infine un grande termometro ad aria (*Pogg. Ann. Jubelband*) costruttore Edelmann di Monaco.

Il barometro adoperato era di Deleuil; diametro 11 millimetri, con verniero a ventesimi: prima di servirsene fu bollito dal sig. U. Marchi dell'Osservatorio di Firenze, e poscia a lungo confrontato col barometro dell'Osservatorio Meteorologico del R. Istituto superiore di Firenze, grazie alla gentilezza del collega chiar.^{mo} Prof. Pittei. Aggiungendo 0,mm 480 alla lettura il nostro barometro andava d'accordo con quello dell'Osservatorio centrale di Roma. Abbiamo ancora un barometro normale a sifone costruito dal Geissler ed un altro normale sistema Regnault (costruito sotto la nostra direzione dall'egregio meccanico F. Alari dell'Istituto Geodetico militare) quest'ultimo però non fu ancora riempito di mercurio, ma ci servirà per un confronto finale del barometro.

Disponiamo di tre *catetometri*: l'uno di Perreaux di Parigi, che fu acquistato crediamo, alla prima esposizione universale di Parigi, dietro rapporto favorevole dei sigg. Tresca e Regnault (è il catetometro di cui si servì l'Illustre Prof. E. Villari nei suoi belli studii sulla dilatazione termica dei legni): il secondo catetometro è fatto dall'Edelmann di Monaco; ha due cannocchiali muniti di micrometro oculare (parte ottica di Merz di Monaco), ha l'altezza utile di metri due; fu acquistato per il ga-

binetto di Fisica nel 1883; il terzo è costruito dal Miller di Innsbruck, secondo il modello che fornì al gabinetto di Fisica del R°. Istituto di Studii Superiori di Firenze, con molte modificazioni, diverse delle quali furono gentilmente suggerite al costruttore dal Chiar.mo Prof. Roiti. Fu acquistato nel 1884. Quest'ultimo catetometro esige un metro campione sospeso verticalmente.

I metri campioni che abbiamo disponibili sono tre: ma due soli sono quelli che ci occorrono, e cioè un metro campione in bronzo fabbricato dalla *Société génévoise di Plain Palais*, ed un altro bellissimo in cristallo di *Saint Gobain* costruito per noi dalla stessa officina, ambedue accuratamente confrontati col metro campione di platino posseduto dal R°. Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio, grazie alle premure del Chiar.mo Prof. Pisati. I metri campioni venivano sostenuti verticalmente per mezzo di un apparecchio immaginato dai chiarissimi sigg. prof. Pucci e Pisati [1]) i quali furono così gentili da inviarci i disegni e modelli in legno per rifarlo. L'apparecchio fu costruito nel 1883 dal sig. F. Alari meccanico dell'Istituto Geodetico militare di Firenze.

Palline metalliche. — Queste furono di rame del commercio, di stagno purissimo (dal sig. T. Schuchardt, Goerlitz) di argento purissimo (Londra, per mezzo del sig. Dall'Eco), di platino chimicamente puro (dalla casa Matthey di Londra) di piombo chimicamente puro (T. Schuchardt di Goerlitz).

Cassa pei confronti col termometro ad aria. — Il Rowland a pag. 91 (*fig.* 1 *e* 2) della memoria più volte da noi citata descrive un apparecchio assai complicato per paragonare i termometri normali a mercurio col termometro ad aria: noi ne costruimmo anche un piccolo modello ma non ce ne servimmo e facemmo costruire un altro apparecchio destinato al confronto dei termometri a mercurio, col termometro ad aria solo per la temperatura fra 0° e +40°. È un apparecchio gigantesco dove la costanza, quasi assoluta, della temperatura si ottiene mercè la grande massa dell'acqua (circa 500 litri) continuamente agitata da ottimi agitatori. Due lastre di cristallo da specchio permettono la lettura dei termometri calorimetrici, i quali sono così

1) Pisati e Pucci. *Sulla lunghezza del pendolo a secondi.* — *Atti della R. Accademia dei Lincei.* Roma, vol. XV seduta del 4 Febbraio 1883.

completamente immersi entro un bagno a temperatura esattamente costante. Il riscaldamento e il pompamento e la circolazione dell'acqua scaldata sono promossi dall'agitatore che fa le veci di stantuffo, ed avvengono in modo non diverso da quello che è nell' apparecchio di Rowland. La cassa fu costruita per la parte in legno dal sig. Vannucci falegname di questo laboratorio fisico, e per la parte metallica dalla casa Dall' Eco di Firenze. (Viale Principe Eugenio 5).

Reostati. — Occorrendoci in tale revisione delle misure calorimetriche di avere a determinare il calore svolto nei fili metallici da correnti continue, era molto importante procurarsi dei campioni di resistenza sui quali non potessero sollevarsi obbiezioni. Grazie alla gentilezza dei chiarissimi Prof. J. Kohlrausch di Würzburg e Prof. A. Roiti di Firenze abbiamo potuto avere due copie in argentana del metro di mercurio sez. $1^{mm□}$ costruito dal sig. Dott. Strecker a Würzburg con tutte le correzioni relative alla temperatura. Queste due copie portano i num. 15 e 21.

V. Veniamo ora a dire di alcuni dei risultati ottenuti: anzi ne trascriveremo come saggio una parte brevissima, traendone poscia qualche conseguenza.

I numeri scritti nelle seguenti colonne indicano i calorici specifici medi dei metalli indicati in alto sopra ciascuna colonna: medi fra 100° circa e la temperatura finale dell' acqua o del mercurio del calorimetro.

Questa temperatura finale era poi superiore a quella iniziale, di circa 3° pel rame; di 2°,5 per lo stagno; di 2°,2 per l'argento; di 2°,0 pel piombo; di 3° pel platino (in media).

Temperature iniziali del liquido del calorimetro	Calorici specifici medii del				
	Rame del commercio (rispetto all'acqua)	Stagno purissimo (rispetto all'acqua)	Argento purissimo (rispetto all'acqua)	Piombo purissimo (rispetto all'acqua)	Platino puro (rispetto al mercurio purissimo)
0°— 1°	0,093 885	0,056 100	0,056 0795	0,030 7209	0,96 8613
1 — 2	766	106	—	—	—
2 — 3	963	173	1486	8690	3524
3 — 4	815	084	—	—	—
4 — 5	856	0,055 920	1100	9136	3961
5 — 6	879	896	—	—	—
6 — 7	731	949	1429	8770	1009
7 — 8	632	932	—	—	—
8 — 9	591	823	1588	9170	1866
9 — 10	890	677	—	—	—
10 — 11	377	518	6363	0,031 0482	4461
11 — 12	335	660	—	—	—
12 — 13	221	585	2642	0038	1375
13 — 14	412	440	—	—	—
14 — 15	439	576	9863	0,030 9458	0144
15 — 16	446	633	—	—	—
16 — 17	925	565	9517	9008	0,95 8967
17 — 18	0,094 014	932	—	—	—
18 — 19	0,093 609	930	5232	0,031 0383	0,96 9153
19 — 20	697	832	—	—	—
20 — 21	989	991	5450	1198	0,96 9171
21 — 22	0,094 119	0,056 289	—	—	—
22 — 23	0,093 925	237	6588	0040	8732
23 — 24	972	121	—	—	—
24 — 25	799	0,055 761	4305	0,030 8268	0,97 0200
25 — 26	0,094 035	770	—	—	—
26 — 27	0,093 845	0,056 026	5618	8068	0,97 1436
27 — 28	0,092 779	0,055 383	—	—	—
28 — 29	0,093 179	272	3950	9603	0,97 2417
29 — 30	0,093 549	354	—	—	—
30 — 31	0,093 432	652	4574	7643	0,97 1215
31 — 32	—	—	—	—	—
32 — 33	—	—	1422	6169	—

Ciascuno dei numeri qui inscritti è la media di 15 a 20 esperienze; le serie col rame e con lo stagno furono eseguite con i termometri Geissler, le altre serie coi termometri Baudin.

I resultati precedenti sono ottenuti con termometri calibrati ma di cui non si è tenuto conto del paragone col termometro ad aria. Si scorge che *in tali circostanze e condizioni il mercurio presenta presso a poco le stesse irregolarità che l'acqua.*

È dunque forza ammettere che tali irregolarità debbano in gran parte attribuirsi alla diversa dilatazione dei vetri dei termometri: e se ne conclude nel modo il più visibile che senza il confronto col termometro ad aria le esperienze calorimetriche perdono quasi ogni valore. Aggiungiamo intanto che questo confronto calorimetrico si sta compiendo ora con tutta la precisione, ma che intanto possiamo già asserire, dietro i confronti fatti già alcuni anni sono, che le irregolarità tendono a sparire od almeno a diminuire di assai con la riduzione al termometro ad aria.

In un'altra serie di esperienze a cui attendiamo, abbandonati i termometri a mercurio, ci serviamo soltanto di un termometro ad aria, il cui bulbo è metallico e perciò si mette rapidamente in equilibrio di temperatura, e la massa di acqua del calorimetro (parecchie diecine di chilogrammi) è tanto grande che le correzioni pel raffreddamento durante l'esperienza sono addirittura trascurabili, ossia molto più piccole del più piccolo degli errori possibili di osservazione.

VI. Oltre le esperienze sul calore specifico dell'acqua coi quattro metodi sopraccennati abbiamo in corso altre esperienze calorimetriche, cioè una nuova determinazione dell'equivalente meccanico del calore, con calorimetri ad acqua e col metodo immaginato da uno di noi: calore svolto dalle correnti continue nei circuiti metallici; (questa determinazione col calorimetro Bunsen e coi calorimetri ordinarii); e calore solare [1]) osservazioni simultanee con apparecchi di precisione, alla base ed alla cima di un'alta montagna (Monte Morello, altezza di circa 900 metri nelle vicinanze di Sesto Fiorentino) e di altre montagne ancora più elevate, della Toscana.

1) Compara Frölich, *Wiedemann Annalen*, 1884 Bd. XXI s. 1.

SOPRA ALCUNE RELAZIONI STABILITE DAL SIG. DE HEEN FRA LA DILATABILITÀ E IL PUNTO DI EBULLIZIONE DEI COMPOSTI DI UNA STESSA SERIE OMOLOGA; NOTA DEI PROFESSORI A. BARTOLI ED E. STRACCIATI.

Il sig. De Heen nella sua bellissima memoria intitolata *Essai de Physique comparée* (Bruxelles 1883) osserva a pag. 73 che

« Per gli alcoli e per gli eteri dei radicali monoatomici così « come per gli omologhi della benzina il prodotto del coefficiente « di dilatazione per la temperatura assoluta di ebullizione [1]) è « una quantità sensibilmente costante per i liquidi di una stessa « serie ».

Questa regola del sig. De Heen quantunque puramente empirica, potrebbe essere molto utile in certi casi. Il sig. De Heen, non indica a quale temperatura va preso il coefficiente di dilatazione, perchè il prodotto per la temperatura assoluta di ebullizione riesca il più costante che è possibile; ma negli esempi che porta egli sceglie il coefficiente di dilatazione fra zero gradi e quindici gradi.

Avendo noi con gran cura studiate le proprietà fisiche dei diversi idrocarburi $C_n H_{2n+2}$ dei petrolii di Pensilvania, abbiamo voluto vedere se a questi si potevano applicare le regole del De Heen: e nel caso che queste non si applicassero, se fosse possibile trovare qualche altra regola più approssimata; ed infine se di questa regola, empiricamente posta, si potesse trovare il nesso con qualche relazione fisica ben solidamente stabilita. Tale è lo scopo della nota presente.

Intanto incominciamo dal riportare quì la tavola dei punti di ebullizione e delle dilatazioni dei diversi idrocarburi:

1) Cioè per la temperatura di ebullizione contata da — 273. Abbiamo creduto necessaria questa nota, perchè taluni chiamano erroneamente punto assoluto di ebullizione la temperatura critica volgare, portando nella scienza la più grande confusione di nomi.

	Temperature di ebullizione	Coefficiente medio di dilatazione fra 0° e la ebullizione	Densità alla temperatura t compresa fra 0 e 30°
Idruro di amilo C_5H_{12}	+30°	0,001 589 0	D_t=0,640 251 [1—0,001 346 373 t — 0,000 005 653 208 t^2]
» di caproilo C_6H_{14}	68	0,001 405 56	D_t=0,694 990 [1—0,001 060 109 t — 0,000 006 771 339 t^2]
» di enantilo C_7H_{16}	93	0,001 419 22	D_t=0,732 827 [1—0,001 156 064 t — 0,000 000 136 491 t^2]
» idem C_7H_{16}	93	0,001 398 75	D_t=0,730 353 [1—0,001 149 001 t — 0,000 000 861 598 t^2]
» di caprilo C_8H_{18}	117	0,001 211 60	D_t=0,746 312 [1—0,001 068 842 t — 0,000 000 641 196 t^2]
» di pelargil. C_9H_{20}	137	0,001 268 08	D_t=0,762 360 [1—0,001 029 104 t — 0,000 000 715 620 t^2]
» di rutilo $C_{10}H_{22}$	160	0,001 185 94	D_t=0,771 136 [1—0,000 906 298 t — 0,000 002 629 383 t^2]
» di undecil. $C_{11}H_{24}$	181	0,001 165 81	D_t=0,781 676 [1—0,000 865 812 t — 0,000 002 491 556 t^2]
» di laurilo $C_{12}H_{26}$	199	0,001 137 30	D_t=0,791 512 [1—0,000 905 877 t — 0,000 000 971 361 t^2]
» di cocinilo $C_{13}H_{28}$	219	0,001 084 55	D_t=0,801 699 [1—0,000 811 813 t — 0,000 002 676 929 t^2]
» di miristil. $C_{14}H_{30}$	238	0,001 108 72	D_t=0,812 978 [1—0,000 822 841 t — 0,000 001 592 986 t^2]
» di benilo $C_{15}H_{32}$	260	0,001 088 11	D_t=0,822 399 [1—0,000 765 179 t — 0,000 002 356 519 t^2]
» di palmitil. $C_{16}H_{34}$	280	0,001 037 82	D_t=0,828 731 [1—0,000 711 498 t — 0,000 002 468 680 t^2]

Nella tavola seguente sono scritti pei diversi idrocarburi i valori del prodotto della temperatura di ebullizione contata da —273 pel coefficiente medio di dilatazione fra zero e l' ebullizione.

$C_5 H_{12}$	0,48
$C_6 H_{14}$	0,49
$C_7 H_{16}$	0,50
$C_8 H_{18}$	0,47
$C_9 H_{20}$	0,52
$C_{10}H_{22}$	0,51
$C_{11}H_{24}$	0,53
$C_{12}H_{26}$	0,54
$C_{13}H_{28}$	0,53
$C_{14}H_{30}$	0,56
$C_{15}H_{32}$	0,58
$C_{16}H_{34}$	0,57 .

Questi prodotti, come si vede crescono un poco col crescere della complessità della formula, ma si potrebbe ritenere però, come prima approssimazione, che siano sensibilmente costanti.

Però, se invece di considerare il coefficiente di dilatazione, si prende il modulo K della formula di Mendeleeff

$$D_t = D_0 (1 - K t)$$

i valori di K così calcolati sono quasi esattamente in ragione inversa della temperatura assoluta di ebullizione. Nella tavola seguente T rappresenta la temperatura di ebullizione contata sul termometro ad aria, a partire dallo zero assoluto.

H (°)		T	K T
C_5H_{12}	0,001516	302	0,4578
C_6H_{14}	1282	341	0,4372
C_7H_{16}	1254	366	0,4589
C_7H_{16}	1238	366	0,4531
C_8H_{18}	1062	389,9	0,4141
C_9H_{20}	1085	409,73	0.4445
$C_{10}H_{22}$	1005	432,47	0,4346
$C_{11}H_{24}$	0,0009714	453,18	0,4402
$C_{12}H_{26}$	9402	470,77	0,4426
$C_{13}H_{28}$	8893	490,18	0,4359
$C_{14}H_{30}$	8953	508,52	0,4553
$C_{15}H_{32}$	8695	529,50	0.4604
$C_{16}H_{34}$	8262	548,60	0,4532

Concludiamo dunque che per gli idrocarburi del petrolio invece che la regola empirica del De Heen, vale meglio la regola nostra che cioè « *per questa classe di liquidi il modulo di dilatazione* K *è in ragione inversa della temperatura di ebullizione contata dallo zero assoluto* ».

Anche la nostra però è una regola empirica. Essa però è dovuta al fatto che per gli idrocarburi del petrolio le temperature assolute di ebullizione sono sensibilmente proporzionali alle rispettive temperature critiche assolute [1]) e che il modulo di dilatazione di Mendeleeff, K, non differisce molto dall'essere, per gli idrocarburi $C_n H_{2n+2}$ dei petroli di Pensilvania, proporzionale al modulo assoluto di dilatazione H da noi considerato nella nostra memoria sovracitata.

Infatti ammesse queste due proporzionalità la regola empirica ultimamente stabilita discende subito dal Teorema *Bartoli Stracciati* che cioè

« Il modulo di dilatazione H della formula $V_T = \frac{1}{1 - HT}$

1) Vedi Bartoli e Stracciati: *Intorno ad alcune formule* date dal sig. D. Mendeleeff e dai sigg. Thorpe e Rücker, *Nuovo Cimento*, 3.a serie, vol. XVI Pisa, 1884, e Bartoli Stracciati: *Le temperature critiche e i volumi molecolari degli idrocarburi* $C_n H_{2n+2}$ *dei petrolii*; *Nuovo Cimento* 3.a serie, vol. XVI Pisa 1884; nonchè Bartoli e Stracciati: *Le proprietà fisiche degli idrocarburi dei petrolii*, Memorie della R. Accademia dei Lincei; approvate nell'Adunanza 15 Giugno 1884.

« dove T è la temperatura contata dallo zero assoluto, è pei di-
« versi liquidi in ragione inversa della temperatura critica as-
« soluta. »

Dai Gabinetti di Fisica degli Istituti Tecnici Firenze, Arezzo
1° Gennaio 1885.



SULLA DILATAZIONE TERMICA DI UN MESCUGLIO DI DUE LIQUIDI, DEDOTTA DALLE DILATAZIONI DEI COMPONENTI, COMBINANDO UNA NOSTRA FORMULA CON UN'ALTRA DEL SIG. PAWLEWSKI; NOTA DEI PROFESSORI A. BARTOLI ED E. STRACCIATI.

I. In una memoria precedente noi abbiamo dimostrato che pei liquidi e, dentro quei limiti di temperatura, ai quali erano applicabili, la formula di Van der Waals

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{V_t}\frac{dV_t}{dt}T_c = C$$

e l'altra di Mendeleeff

$$\text{(2)} \qquad V_t = \frac{1}{1 - Kt}$$

la quale può scriversi, contando le temperature dallo zero assoluto

$$\text{(2)}_{bis} \qquad V_T = \frac{1}{1 - HT}$$

cioè a dire che: pei liquidi la cui dilatazione non presenta singolarità e per temperature a cui la tensione del vapore è piccola, vale la formula

$$\text{(3)} \qquad H\,T_c = \text{costante}$$

Ora dalla formula (3) da noi trovata vogliamo trarre alcune

conseguenze [1]) combinandola con la seguente

(4)
$$\vartheta = \frac{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

dovuta al sig. Pawlewski e confermata dal sig. O. Strauss [2]) nella quale ϑ indica la temperatura critica di un mescuglio di due liquidi, le cui temperature critiche sono τ_1 e τ_2 e le proporzioni su 100 sono α_1 ed α_2. In questa formula (4) lo zero delle temperature $\vartheta\, \tau_1\, \tau_2$ può essere qualunque: noi supporremo queste temperature contate dallo zero assoluto.

Lo Strauss trova la formula (4) esattamente verificata per le mescolanze di alcole e di etere e l'applica poi alle mescolanze di acqua e di alcole per calcolare il valore (fin quì non potuto determinare direttamente) della temperatura critica dell' acqua.

II. Siano ora H, H_1, H_2, i moduli limite di dilatazione di due liquidi le cui temperature critiche assolute sono

$$\vartheta,\quad \tau_1,\quad \tau_2$$

sarà, in virtù dell'equazione Bartoli-Stracciati (3)

$$H\vartheta = H_1 \tau_1 = H_2 \tau_2 = \text{costante}$$

onde la (4) di Pawlewski diventa

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{\alpha_1}{H_1} + \frac{\alpha_2}{H_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

od anche

(5)
$$H = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\frac{\alpha_1}{H_1} + \frac{\alpha_2}{H_2}}$$

1) In queste formule t esprime la temperatura volgare, T la temperatura contata da. — 273° e Tc la temperatura critica contata pure da — 273°, ossia la temperatura assoluta. La costante K fu da Mendeleeff chiamato *il modulo di dilatazione* e noi abbiamo chiamato *modulo limite di dilatazione* la costante H. Vedi Bartoli e Stracciati; *Intorno ad alcune formule date dal sig. Mendeleeff e dai sigg. Thorpe e Rücker; Nuovo Cimento*, 3.a serie, vol. XVI, Agosto 1884.

2) Br. Pawlewski, *Ueber die Kritischen Temperaturen flüssiger Körper* (Chem. Ber. 15. pag. 460-462; 1882). — O Strauss *J. der. russ. phys. Ges.* 12 pag. 207-218 anno 1880 e *Beiblatter*, vol. VI. pag. 282. Cfr. anche Ramsay. *On the critical point.* — *Proceedings of the Royal Society*, t. XXXI, p. 194, 1880; Gerard-Ansdell, *Society*, XXXIV, p. 113, 1882.

per mezzo della quale può *determinarsi il modulo limite di dilatazione di un mescuglio, noti che siano le proporzioni ed i moduli limite di dilatazione dei componenti.*

III. Il modulo limite H di un liquido può facilmente calcolarsi dalle densità del liquido, o dai volumi del liquido a due temperature assolute T_1 e T_2.

Infatti dalle formule di Mendeleeff

$$D_{T_1} = D_0 (1 - H T_1)$$
$$D_{T_2} = D_0 (1 - H T_2)$$

si deduce

$$\frac{D_{T_1}}{D_{T_2}} = \frac{1 - H T_1}{1 - H T_2}$$

onde

(A)
$$H = \frac{D_{T_2} - D_{T_1}}{T_1 D_{T_2} - T_2 D_{T_1}}$$

E' così pure dalle formule di Mendeleeff

$$V_{T_1} = \frac{1}{1 - H T_1}$$
$$V_{T_2} = \frac{1}{1 - H T_2}$$

si deduce

(B)
$$H = \frac{V_{T_1} - V_{T_2}}{T_1 V_{T_1} - T_2 V_{T_2}}$$

IV. Noi abbiamo applicate queste formule agli idrocarburi $C_n H_{2n+2}$ dei petrolii ed alle loro mescolanze per vedere se la formula (5) fosse verificata.

Dallo studio che abbiamo fatto della dilatazione degli idrocarburi $C_n H_{2n+2}$ del petrolio di Pensilvania risulta che [1]) i valori della costante H per l'idruro di caproilo e per l'idruro di palmitilo sono:

Idruro di caproilo	$C_6 H_{14}$	$H_1 = 0{,}000\,943\,045$
Idruro di palmitilo	$C_{16} H_{34}$	$H_2 = 0{,}000\,648\,530$

1) Bartoli e Stracciati. *Le proprietà fisiche degli idrocarburi del petrolio;* Memoria letta alla R. Accademia dei Lincei il 15 Giugno 1884.

Calcolando H per le mescolanze di questi due idrocarburi con la formula (5) si trovano i valori che sono scritti nella tavola seguente, dove nella ultima colonna sono scritti i valori di H trovati sperimentalmente, deducendoli cioè con la formula (A) dalle densità che avevano a diverse temperature i mescugli dei due idrocarburi

MESCUGLIO DI	H calcolato con la formula (5)	H trovato con l'esperienza fra $T_1 = 278$ e $T_2 = 304$
2 parti in peso C_6H_{14} e una parte $C_{16}H_{34}$	H = 0,000 819 094	0,000 836 054
1 parte in peso C_6H_{14} e una parte $C_{16}H_{34}$	H = 0,000 768 556	0,000,777 274
1 parte in peso C_6H_{14} e due parti $C_{16}H_{34}$	H = 0,000 723 889	0,000 724 353

In questo caso come si vede, l'accordo non è perfetto, ma però sufficiente, per ritenere la (5) valevole in via approssimativa nel caso di mescolanze di idrocarburi $C_n H_{2x+2}$, anche scegliendo questi idrocarburi fra i due limiti estremi della serie.

V. Se però si prova la formula (5) pei mescugli di alcool e di acqua, si ottengono resultati in contradizione con la esperienza, qualunque siano i limiti di temperatura fra i quali si applicano le formule (5) ed (A). Le dilatazioni dell'acqua, e dell'alcole come è a tutti noto sono state così accuratamente studiate che non vi può essere dubbio sull'esattezza delle medesime. E si noti che tale disaccordo con l'esperienza si ha anche calcolando H_1 H_2, H da densità comprese fra + 100° e temperature più alte.

Vero è però, che per l'acqua le (1) e (2) ecc. non sono applicabili, e perciò non è applicabile nemmeno la (3) onde non deve recare maraviglia se anche la (5) non sia applicabile per le mescolanze o soluzioni acquose.

VI. Mancano i dati sperimentali per verificare se la (5) sia applicabile alle mescolanze di altri liquidi da quelli fin quì esaminati.

Ritorneremo fra breve sullo stesso argomento.

Firenze, 1 Giugno 1885.

RICERCHE TEORICHE E SPERIMENTALI SUL GENERATORE SECONDARIO GAULARD E GIBBS; DEL PROF. GALILEO FERRARIS [1]).

§ 14.° *Coefficiente di rendimento quando le spirali secondarie sono collegate in quantità.*

Il generatore secondario sul quale furono eseguite dal sig. Uzel le esperienze che abbiamo or ora calcolato fu pure sperimentato colla spirale secondaria divisa in due porzioni uguali e collegate *in quantità*. I risultati delle esperienze fatte in questo caso sono registrate nell'ultima parte della tabella del sig. Uzel (§ 6°), sotto l'intestazione: « *grande colonna in quantità per due* ». E siccome il generatore secondario ha lo scopo principale di produrre correnti secondarie di intensità maggiore della primaria, ed è perciò destinato a funzionare normalmente colle spirali accoppiate in quantità, così è importante che noi ci serviamo delle esperienze del sig. Uzel per applicare le nostre formole anche in questo caso.

Determineremo, come abbiamo fatto pel caso già studiato, il rapporto u tra il coefficiente di rendimento effettivo ed il coefficiente di rendimento teorico.

Nel § 5°. abbiamo dimostrato che se con I' si rappresenta il valor massimo teorico dell'intensità di una delle correnti indotte parziali che si hanno nelle singole spirali secondarie, le formole che dànno le intensità delle correnti primarie e secondarie nel caso del generatore disposto in tensione servono eziandio pel caso del generatore secondario con N spirali secondarie collegate in quantità, alla sola condizione di cambiare r' in $N^2 r'$. In grazia di questa proposizione la formola (27″) si deve cambiare, pel caso attuale, in quest'altra:

$$(27''') \ldots\ldots \quad \left(\frac{I}{I'}\right)^2 = \frac{N^2 r' + 2\rho}{r_1^2 - \rho^2} N^2 r' .$$

Ora diciamo i la media intensità della corrente misurata coll'elettrometro o coll'elettrodinamometro nel circuito primario,

1) *Continuazione e fine.* V. pag. 12.

ossia la radice quadrata della media dei quadrati della intensità variabile; diciamo similmente i' la media intensità misurata nello stesso modo sul circuito secondario esterno; abbiamo

$$i^2 = \frac{I^2}{2} \text{ e } i'^2 = u\,N^2 \frac{I'^2}{2} ;$$

quindi la (27''') dà:

$$(55'') \qquad u = \frac{(N^2 r' + 2\rho)\, r'}{r_1^2 - \rho^2} \left(\frac{i'}{i}\right)^2 .$$

Questa formola che rimpiazza pel caso attuale la (55), la comprende come caso particolare.

Per farla servire al calcolo delle esperienze fatte coll'elettrometro, possiamo eliminare da essa le resistenze r' ed r_1, introducendovi invece le medie differenze di potenziali v e v' misurate coll'elettrometro fra i due morsetti della spirale primaria e fra quelli della spirale secondaria. Abbiamo infatti

$$(r' - \rho')\, i' = v' \quad , \quad r_1\, i = v \;,$$

ossia notando che $\rho' = \frac{\rho}{N^2}$:

$$\left(r' - \frac{\rho}{N^2}\right) i' = v' \quad , \quad r_1\, i = v \;.$$

Sostituendo nella (55'') otteniamo quindi:

$$(55''') \qquad u = \frac{(N^2 v' + 3\rho i')\,\left(v' + \frac{\rho}{N^2} i'\right)}{(v + \rho i)\,(v - \rho i)} .$$

Nelle esperienze del sig. Uzel, alle quali vogliamo applicare la formula, era $N = 2$; dunque

$$u = \frac{(4\,v' + 3\,\rho\, i')\left(v' + \frac{\rho}{4}\, i'\right)}{(v + \rho\, i)\,(v - \rho\, i)} .$$

e sostituendo subito a ρ il suo valore 0,30:

$$(55^{iv}) \qquad u = \frac{(4\,v' + 0{,}9\, i')\,(v' + 0{,}075\, i')}{(v + 0{,}30\, i)\,(v - 0{,}30\, i)} .$$

Coi valori di i, v, i', v' trovati dal sig. Uzel e registrati nella tabella data al § 6°, questa formola dà i valori di u che riuniamo nel seguente specchietto:

Valori *di* u *pel generatore secondario con la spirale secondaria divisa in due parti collegate in quantità.*

i	v	i'	v'	u	δ	δ^2
12,13	43	23,50	17	0,91	− 0,06	0,0036
»	88	22,47	40	0,98	+ 0,01	1
»	114	21,97	54	1,01	+ 0,04	16
»	149	19,65	70,4	0,97	0	0
»	168	17,00	80,5	0,98	+ 0,01	1
			Media =	0,97	$\Sigma\delta^2$ =	0,0054

$$\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}} = 0,036 \ , \quad \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}} = 0,013 \ .$$

Errore probabile del medio = 0,01.

Si trova così, con un errore probabile di circa un centesimo, il valore

$$u = 0,97 \ .$$

Questo valore è di circa 2 per cento inferiore a quello che tanto colle nostre esperienze calorimetriche quanto colle misure elettrometriche del sig. Uzel abbiamo trovato pel generatore secondario colle spirali secondarie collegate in circuito semplice, o come si suol dire: in tensione.

È facile intravedere la ragione di un tale fatto. Il fatto è dovuto, molto probabilmente, alla non perfetta uguaglianza delle forze elettromotrici nelle due parti della spirale secondaria. Si può infatti dimostrare che data la quantità di energia svolta e trasformata in calore nel totale circuito secondario, la proporzione nella quale questa energia si divide fra il circuito esterno ed il complesso delle due spirali indotte varia col variare del rapporto fra le due forze elettromotrici agenti su tali spirali, e che della energia totale si manifesta e si trasforma in calore nel

circuito esterno una frazione tanto più grande quanto più quelle due forze elettromotrici sono prossime ad essere uguali. In altri termini: il rapporto tra l'energia svolta nel circuito esterno e l'energia totale svolta nel complesso dei circuiti secondarii è massimo quando le forze elettromotrici nelle due spirali secondarie riunite in quantità sono esattamente uguali; ha un valore minore se esiste fra le due forze elettromotrici una differenza.

I fenomeni, che si presentano quando le forze elettromotrici sulle due spirali secondarie sono differenti, sono nella realtà molto complicati. Ma dell'influenza che la differenza delle forze elettromotrici può avere sulla distribuzione dell'energia fra le due parti del circuito secondario possiamo farci una idea vedendo che cosa accadrebbe nel caso più facile a trattarsi nel quale si avessero correnti costanti. In questo caso, supposte le due spirali secondarie perfettamente uguali, e detta ρ la loro resistenza comune, diciamo R la resistenza del circuito secondario esterno, e_1 ed e_2 le forze elettromotrici agenti sulle due spirali, i_1 ed i_2 le intensità delle correnti nelle medesime, ed i l'intensità nel circuito esterno. Abbiamo:

$$\rho i_1 + Ri = e_1 ,$$
$$\rho i_2 + Ri = e_2 ,$$
$$i_1 + i_2 = i .$$

Detto poi x il rapporto tra l'energia trasformata in calore nel circuito esterno e la totale energia svolta nel circuito secondario, abbiamo

$$x = \frac{Ri^2}{\rho(i_1^2 + i_2^2) + Ri^2} .$$

Da queste quattro equazioni è facile ricavare, eliminando i_1, i_2, i:

$$x = \frac{R\rho}{2R + \rho} \cdot \frac{(e_1 + e_2)^2}{R(e_1 - e_2)^2 + \rho(e_1^2 + e_2^2)} ;$$

e se poniamo

$$e_2 = ke_1 ,$$

possiamo scrivere anche

$$x = X \frac{\rho}{2} \frac{(1+k)^2}{R(1-k)^2 + \rho(1+k^2)} ,$$

ove

$$X = \frac{2R}{2R + \rho}.$$

La derivata di x rispetto a k è

$$\frac{dx}{dk} = 2R\rho \frac{1 - k^2}{[R(1-k)^2 + \rho(1 + k^2)]^2},$$

ed è $= 0$ per $k = 1$. Il rapporto x è adunque massimo, ossia è massima quella frazione dell'energia totale che si trasforma in calore nel circuito esterno quando $e_1 = e_2$. In questo caso è

$$x = X;$$

in tutti gli altri casi x è uguale al valor massimo X moltiplicato per la frazione

$$\frac{\rho}{2} \frac{(1 + k)^2}{R(1-k)^2 + \rho(1 + k^2)}.$$

Per farci un'idea dei valori che può prendere questa frazione quando k è diverso da 1, diamo successivamente a k i valori

0,99 , 0,98 , 0,95 , 0,90 ;

troviamo che la detta frazione diventa successivamente:

0,933 , 0,930 , 0,908 , 0,839 .

Ciò dimostra che basta che le due forze elettromotrici agenti sulle due spirali secondarie presentino l'una rispetto all' altra una differenza dell'uno, del due, del cinque, del dieci per cento per fare che il rapporto dell'energia esterna utilizzabile all'energia totale si abbassi del 6,7, del 7, del 9, del 16 per cento al disotto del suo valore massimo.

Ora se, come nelle esperienze eseguite coll'elettrometro o col calorimetro, si valuta l'energia prodotta nel circuito secondario deducendola da quella svolta nel circuito esterno, che è la sola che si possa misurare, il coefficiente di rendimento deve trovarsi diminuito nel rapporto di X ad x.

Siccome il calcolo che abbiamo fatto si riferisce al caso di correnti continue, così noi non possiamo asserire che effettiva-

mente la perdita di effetto utile che può aver luogo nel generatore secondario in causa della ineguaglianza delle condizioni delle spirali indotte abbia esattamente i valori numerici che abbiamo valutato; ma le considerazioni fatte bastano per farci intravedere che tale perdita potrebbe in alcuni casi essere considerevole.

E siccome i generatori secondarii sono specialmente destinati a funzionare collegati in quantità, così alle considerazioni su riferite si dovrà avere molto riguardo nella costruzione e nell'uso degli apparecchi.

Se la differenza tra le forze elettromotrici agenti sulle spirali secondarie riunite in quantità fossero considerevoli, potrebbe anche accadere che al danno risultante dalla diminuzione del coefficiente di rendimento si sovrapponesse quello ancor più grave di una produzione di calore nell'interno dell'apparecchio, la quale potrebbe nuocere alla durata del medesimo ed alla regolarità del suo funzionamento.

Probabilmente si troverà la via migliore per evitare tali inconvenienti rinunziando a collocare più spirali secondarie su di una medesima colonna, e collegando invece *in quantità* più generatori secondarii distinti, nei quali si sia cercato di ottenere e si sia preventivamente verificata la più perfetta uguaglianza praticamente ottenibile.

§ 15°. *Sulla potenza del generatore secondario.*

Nello studio teorico che abbiamo fatto precedere alla descrizione delle esperienze abbiamo veduto come si possa calcolare l'energia che per una data intensità media della corrente primaria un generatore secondario può svolgere sia nell'intiero circuito secondario, sia nella parte esterna di questo. Servono a questo calcolo le formole (38), che trascriviamo:

$$(38) \qquad \frac{q'}{\frac{1}{2}I^2} = \frac{r'C^2}{r'^2 + C^2}, \qquad \frac{q''}{\frac{1}{2}I^2} = \frac{(r'-\rho')C^2}{r'^2 + C^2};$$

ed in queste formole $\frac{1}{2}I^2$ rappresenta la media dei quadrati dell'intensità della corrente primaria, media che si legge direttamente sugli strumenti di misura adoperati per le correnti alternative; q' e q'' rappresentano rispettivamente le quantità di ener-

gia svolte in un minuto secondo rispettivamente nel totale circuito secondario e nella sua parte esterna.

I secondi membri delle (38) rappresentano quelle resistenze per cui bisogna moltiplicare il medio quadrato della intensità della corrente primaria per ottenere i valori di q' e di q''.

Si è inoltre dimostrato che $\frac{q'}{\frac{1}{2}I^2}$ è massimo per $r' = C$ e che il valore del massimo è $\frac{C}{2}$; e che similmente $\frac{q''}{\frac{1}{2}I^2}$ diventa massimo per $r' = \rho' + \sqrt{\rho'^2 + C^2}$, e che allora esso vale con grande approssimazione

$$\frac{C^2}{2(C+\rho')}.$$

Ora può interessare di vedere quali valori abbiano $\frac{q'}{\frac{1}{2}I^2}$ e $\frac{q''}{\frac{1}{2}I^2}$ pel generatore secondario sul quale abbiamo eseguito le esperienze.

Ed a quest'uopo basta portare nelle formolè (38) e nelle espressioni che ne abbiamo dedotto relativamente alle condizioni di massimo, il valore

$$C^2 = 500 \ , \quad C = 22,36 .$$

Troviamo così

$$(38') \qquad \frac{q'}{\frac{1}{2}I^2} = \frac{500\, r'}{500 + r'^2}, \qquad \frac{q''}{\frac{1}{2}I^2} = \frac{500\,(r' - 0,28)}{500 + r'^2}.$$

Il valore massimo di $\frac{q'}{\frac{1}{2}I^2}$ corrisponde ad

$$r' = C = 22,36 \text{ ohm}$$

ed è $\frac{C}{2}$, ossia:

$$11,18 \text{ ohm}.$$

Se è data la media intensità $\frac{I}{\sqrt{2}}$ della corrente primaria, colla quale si fa funzionare il generatore secondario, si può calcolare subito la massima quantità di energia che l'apparecchio

produce nel totale circuito secondario moltiplicando semplicemente il quadrato dell'intensità data per la resistenza 11,18. Supponendo, per esempio, che l'apparecchio sia fatto funzionare per mezzo di una corrente primaria della quale l'intensità media letta su di un elettrometro o su di un calorimetro sia uguale a 12 ampère, si trova che la massima quantità di energia che il generatore secondario possa dare nel circuito secondario totale, massima quantità di energia che esso dà quando la resistenza del secondario è 22,36 ohm, è

$$12^2 \times 11{,}18$$

ossia 1610 voltampère per minuto secondo. Tale quantità di energia corrisponde a $\frac{1610}{736}$, ossia a 2,19 cavalli.

Il valore massimo di $\frac{q''}{I^2}$ corrisponde ad

$$r' = C + \rho' = 22{,}36 + 0{,}28$$

ossia ad

$$r' = 22{,}64 \text{ ohm} ,$$

ed è $\frac{500}{2 \times 22{,}64}$, ossia

$$11{,}04 \text{ ohm} .$$

Se quindi, come abbiamo fatto poc'anzi, supponiamo che la media intensità della corrente primaria sia di 12 ampère, troviamo che la massima quantità di energia svolta nella parte esterna del circuito secondario, ossia l'energia massima teorica utilizzabile, è uguale a

$$144 \times 11{,}04 ,$$

ossia a 1590 voltampère per 1",
ossia ancora a

$$\frac{1590}{736} = 2{,}15 \text{ cavalli} .$$

Questa è la produzione teorica dell'apparato; la produzione effettiva di energia utilizzabile nel circuito esterno è, giusta le

conclusioni che abbiamo ricavato dalle esperienze, 2,15 $\times u$, ossia, ponendo $u = 0,99$;

$$2,12 \text{ cavalli}.$$

Quando l'apparecchio dà questa massima quantità di energia utilizzabile nel circuito secondario esterno, esso assorbe per funzionare la quantità di energia equivalente a

$$\frac{2,12}{(\nu)} \text{ cavalli},$$

ove (ν) rappresenta il coefficiente di rendimento esterno effettivo.

Dalla tabella data al § 11° si ricava pel coefficiente (ν) il valore 0,95; si trova adunque che quando l'intensità media della corrente primaria letta su di un elettrometro è di 12 ampère il massimo lavoro che l'apparecchio possa assorbire è di $\frac{2,12}{0,95}$, ossia di

$$2,23 \text{ cavalli}.$$

Quando è $r' = 22,64$ ohm, e l'apparecchio produce la massima energia utilizzabile, il coefficiente pratico di rendimento differisce appena di un centesimo dal massimo che si avrebbe per $r' = 31,9$ ohm. Siccome quindi nelle applicazioni pratiche industriali, quanto è importante avere buoni coefficienti di rendimento altrettanto è utile ottenere con piccoli apparati i massimi effetti, così si può dedurre dai risultati precedenti che probabilmente il miglior modo di adoperare nelle applicazioni pratiche un generatore secondario uguale a quello che noi abbiamo sperimentato consiste nel farlo funzionare con una resistenza r' del circuito secondario uguale a circa 22 o 23 ohm.

Invece nei tentativi di applicazione pratica finora fatti dal sig. Gaulard l'apparecchio venne solitamente adoperato con un circuito secondario di resistenza uguale ad otto od a dieci ohm solamente. Questa è una conseguenza della falsa interpretazione degli esperimenti, la quale aveva condotto tutti gli sperimentatori e l'inventore stesso alla idea erronea che il coefficiente di rendimento dell'apparecchio fosse uguale a $\frac{v' i'}{v i}$, ossia ad $\frac{r' - \rho'}{r'} m$, e che quindi esso avesse il massimo valore per una resistenza del circuito secondario compresa fra i 5 ed i 6 ohm.

Per $r' = 10$ ohm la seconda delle formole (38') dà

$$\frac{q''}{\frac{1}{2} I^2} = 8,10 \text{ ohm} .$$

Quindi per $\frac{I}{\sqrt{2}} = 12$ ampère essa dà

$$q'' = 1166 \text{ voltampère per } 1'';$$

il che vuol dire che l'apparecchio dà nella parte esterna del circuito secondario l'energia equivalente a $\frac{1166}{736}$, ossia a

1,58 cavalli .

Siccome il coefficiente di rendimento esterno effettivo (ν) per $r' = 10$, secondo la tabella data al § 11°, è uguale a 0, 93, così l'energia assorbita dall'apparecchio è equivalente a $\frac{1,58}{0,93}$, ossia a

1,70 cavalli .

L'apparecchio assorbirebbe l'energia equivalente a 1,80 cavalli se lo si attivasse con una corrente primaria di intensità media uguale a circa 12,3 ampère. Ed effettivamente il sig. Gaulard faceva abitualmente assorbire dal generatore secondario del tipo sperimentato l'energia di circa 1,80 cavalli adoperando una corrente, che, misurata grossolanamente con un elettrodinamometro di Siemens, presentava una intensità media alquanto superiore a 12 ampère.

Influenza della struttura del nucleo sulla potenza dell'apparecchio. — Ho avuto occasione di far notare che l'apparecchio, sul quale io ho eseguite le esperienze calorimetriche, e quello sul quale il sig. Uzel fece le sue misure per mezzo dell'elettrometro differivano l'uno dall'altro unicamente perchè il primo aveva un nucleo di legno rivestito di uno strato di fili di ferro, mentre l'altro aveva un nucleo costituito interamente da un fascio di fili di ferro. Quest'ultima era la struttura del nucleo primitivamente adottata dal sig. Gaulard; l'altra invece costituiva una innovazione introdotta dall'inventore collo scopo di diminuire le correnti di Foucault e migliorare con ciò le condizioni del generatore secondario.

Ora noi abbiamo veduto che la modificazione del nucleo non ha migliorato il coefficiente di rendimento, giacchè il valore di u calcolato colle esperienze calorimetriche fatte sul generatore a nucleo di legno risultò esattamente uguale a quello calcolato per mezzo delle esperienze eseguite dal sig. Uzel sul generatore con nucleo tutto di ferro. Ma può aver variato, in causa della detta modificazione del nucleo, la potenza dell'apparecchio, ossia la quantità di energia che con una data intensità della corrente primaria l'apparecchio può assorbire e restituire nel circuito secondario. Ed è una questione importante per la pratica quella di vedere se ciò sia veramente avvenuto e quale sia stata la variazione.

Per risolvere questa questione bisogna determinare il valore di C pel generatore secondario studiato dal sig. Uzel; e sgraziatamente, per le ragioni svolte nel § 11°, ciò non si può fare con soddisfacente esattezza per mezzo dei dati delle esperienze che noi possediamo.

Tuttavia se senza pretendere di fare una determinazione esatta noi ci accontentiamo di stabilire tra i due apparecchi un confronto sufficiente per giudicare, dal punto di vista pratico, della convenienza della modificazione introdotta dall'inventore nella costruzione del nucleo, noi possiamo servirci di un valore approssimativo di C ricavandolo dalle esperienze citate.

Dalle considerazioni che nel § 11° abbiamo svolto relativamente agli errori che si possono commettere calcolando C^2 per mezzo della formola (58), risulta che tali errori sono tanto minori quanto più è grande la resistenza r' colla quale si è sperimentato. Noi possiamo adunque determinare con tale formola, con qualche sicurezza, il valore di C^2 servendoci dei risultati delle esperienze fatte colle più grandi resistenze r'. E siccome la tabella dei valori di u ricavati dalle esperienze dell'Uzel fa vedere che le due ultime esperienze, per le quali il valore di r' è più grande, hanno dato valori di u esattamente uguali al medio, e che quindi tali esperienze si debbono annoverare fra le migliori, così noi potremo ritenere come buono un valore di C ricavato dalle due esperienze medesime.

Ora la (58) si può scrivere

$$C^2 = \frac{r'^2 i'^2}{u i^2 - i'^2},$$

od anche, se si osserva che $r' i' = v'$:

$$C^2 = \frac{v'^2}{u i^2 - i'^2}.$$

Se poniamo per u il suo valore 0,99, e se sostituiamo a v', ad i ed a i' i valori registrati nel quadro delle esperienze di Uzel (§ 6°), otteniamo i risultati seguenti:

v'	i	i'	C
119	12, 13	11, 13	25, 5
138	»	10, 95	27, 2

Avremo un valore approssimativo di C con un errore relativo probabile di circa $\frac{5}{100}$ prendendo la media dei due valori 25,5 e 27,2, ponendo cioè:

$$C = 26,3 .$$

La sostituzione del nucleo di legno al nucleo tutto di ferro ha adunque avuto per effetto di far diminuire il valore di C da circa 26,3 a 22,36, il che è quanto dire: di circa il 15 per cento.

La conseguenza di questa diminuzione di C è che anche la quantità di energia che il generatore secondario può assorbire e restituire quando è attivato da una corrente primaria di data intensità è diminuita. Pel generatore col nucleo interamente di ferro il valore massimo $\frac{q''}{\frac{1}{2} I^2}$, che, come abbiamo imparato, è uguale a $\frac{C^2}{2(C+\rho')}$, è

$$\frac{(26,3)^2}{2 \times 26,6}, \text{ ossia } 13 .$$

Quindi per una corrente primaria di 12 ampère il massimo teorico del lavoro che il generatore secondario può dare nel circuito secondario esterno è

$$\frac{144 \times 13}{736} \text{ cavalli}$$

ossia

$$2{,}54 \text{ cavalli} .$$

Il massimo lavoro effettivo è adunque

$$0{,}99 \times 2{,}54$$

ossia

$$2{,}51 \text{ cavalli} .$$

Invece pel generatore secondario col nucleo parzialmente di legno abbiamo trovato

$$2{,}12 \text{ cavalli} .$$

La diminuzione della potenza dell'apparecchio è adunque uguale a circa il 16 per cento. E siccome il coefficiente di rendimento teorico, che diminuisce col diminuire di C, è anch' esso alquanto diminuito mentre è rimasto costante il rapporto suo col coefficiente di rendimento effettivo, così noi possiamo conchiudere *che colla sostituzione del nucleo col legno al nucleo intieramente di ferro il Gaulard ha peggiorato sensibilmente il suo apparecchio.*

Non sarà inutile che noi notiamo ancora, prima di finire, che, quando il nucleo è interamente di ferro, il miglior modo di adoperare il generatore secondario nelle applicazioni pratiche è di farlo funzionare con una resistenza r' del circuito secondario uguale a circa 26,6 ohm.



FENOMENI DI RIFLESSIONE CRISTALLINA INTERPRETATI SECONDO LA TEORIA ELETTROMAGNETICA DELLA LUCE; PEL PROF. GIUSEPPE BASSO [1]).

IV.

Le cose sin quì accennate preparano allo studio della propagazione, attraverso ad un mezzo coibente isotropo, di una perturbazione elettrica qualunque avente origine in un punto (x, y, z). Questo punto, centro della perturbazione, si consideri pure come centro di una sfera di raggio r arbitrario. Si moltiplichino ambi i membri della prima equazione (3) per $dx dy dz$ e si integri quindi per tutto il volume della sfera applicando il teorema di Green. Si otterrà:

$$4\pi\varepsilon \frac{d^2}{dt^2}\iiint F\, dx\, dy\, dz = \iint \frac{dF}{dr}\, dS\,,$$

dove dS è l'elemento della superficie sferica di raggio r. Prendendo un elemento di volume alla distanza ρ dal centro e ponendo:

$$dS = r^2\, d\omega$$

si potrà anche scrivere:

$$4\pi\varepsilon \frac{d^2}{dt^2}\iint d\omega \int_0^r F \rho^2\, d\rho = r^2 \frac{d}{dr}\iint F\, d\omega\,.$$

Si indichi ancora con $\overline{F}$ il valor medio che la funzione F assume sulla superficie sferica di raggio r, cosicchè si abbia:

$$\overline{F} = \frac{1}{4\pi}\iint F\, d\omega\,.$$

Dalla precedente equazione si passa subito alla seguente:

$$4\pi\varepsilon \frac{d^2(\overline{F} r)}{dt^2} = \frac{d^2(\overline{F} r)}{dr^2}\,.$$

la cui integrale, ponendo:

$$U^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,,$$

1) *Continuazione* e *fine*. Vedi pag. 84.

ha la forma:

$$\overline{F} r = f(r - U\, t) + \psi\,(r + U\, t) \; .$$

Ne risulta che il valor medio di F, quale si trova sulla sfera di raggio r alla fine del tempo t, si va propagando colla velocità U a guisa di onda sferica avente il centro nel punto (x, y, z). Considerazioni analoghe si possono fare per le funzioni G e H. Perciò, nel propagarsi di una perturbazione elettrica da un punto del mezzo ad un altro distante dal primo di U t, la condizione della perturbazione in quest'ultimo alla fine del tempo t dipende da quella in cui si trovava il primo punto al principio dello stesso tempo t.

Designando sempre con e il numero delle unità elettrostatiche di elettricità contenute in un'unità elettromagnetica ed intendendo che entrambe queste unità siano determinate per l'aria, si dimostra facilmente che si ha:

$$\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = e^2 \; ,$$

dove ε_0 rappresenta la costante di polarizzazione dielettrica dell'aria. Donde la conseguenza che la velocità con cui si propagano le perturbazioni elettriche, la quale non è altro che la volocità della luce, coincide col numero e; il che è confermato dall'esperienza.

Quando poi si consideri il passaggio del movimento di propagazione delle perturbazioni elettriche da un mezzo isotropo ad un altro, in virtù della relazione $U^2 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon}$, si scorge che il quadrato dell' indice di rifrazione di un mezzo riferito a quello dell'aria è uguale al rapporto della sua costante di polarizzazione dielettrica a quella dell' aria.

In seno ad un mezzo coibente isotropo e alla fine del tempo t, s'immagini una superficie piana d'onda, cioè un piano passante per gli elementi del mezzo che contemporaneamente si trovano nella stessa condizione di perturbazione elettrica. Se i flussi elettrici che attraversano, con periodiche variazioni d'intensità, questi elementi sono fra loro paralleli e costituiscono così altrettante oscillazioni elettriche, ossia correnti lineari d' intensità

periodicamente variabile le quali hanno tutte direzioni fra loro parallele, l'onda si dice polarizzata. Inoltre fa d'uopo ammettere che il piano di polarizzazione sia normale alla direzione comune delle oscillazioni elettriche se si vuol conciliare l'interpretazione delle proprietà birifrangenti dei mezzi anisotropi colle determinazioni sperimentali delle tre costanti dielettriche che per alcuni di tali mezzi, e specialmente per lo zolfo cristallizzato, vennero eseguite da Boltzmann [1]).

Prendasi ora come asse delle z la normale al piano d'onda considerato e prendasi come piano delle $y\,z$ il piano di polarizzazione, cosicchè le oscillazioni elettriche siano parallele all'asse delle x. In tal caso sono nulle le componenti v, w del flusso normali all'asse delle x e dal modo con cui vennero trovate le funzioni F, G, H risulta immediatamente:

$$G = 0\,, \qquad H = 0\,.$$

Perciò le tre equazioni (3) si riducono all'unica:

$$U^2 \frac{d^2 F}{d z^2} = \frac{d^2 F}{d t^2}\,,$$

nella quale la F dipende dalle sole variabili z e t. Fra le soluzioni particolari di quest'equazione che soddisfano nello stesso tempo alla necessaria condizione di periodicità sceglierò, come del resto propone lo stesso Maxwell, la seguente:

$$F = C \operatorname{sen} \frac{z - U t}{U}$$

dove C è una costante proporzionale al flusso elettrico u e che corrisponderebbe, nella teoria meccanica della luce, alla velocità massima di vibrazione delle particelle eteree. Indicando con L la lunghezza d'onda relativa alla propagazione della perturbazione elettrica e con T il periodo di tale perturbazione o la durata della oscillazione elettrica, cosicchè si abbia:

$$L = U\,T\,,$$

possiamo anche scrivere:

$$F = C \operatorname{sen} \left(\frac{z}{L} T - t\right) \tag{4}$$

1) *Annali di Poggendorff*, 1874.

V.

Se il mezzo coibente è anisotropo e si prendono di nuovo come assi coordinati le sue tre direzioni principali, le equazioni relative alla propagazione di perturbazioni elettriche attraverso di esso vengono da Maxwell [1]) presentate sotto la forma seguente:

$$\frac{d^2 F}{d y^2} + \frac{d^2 F}{d z^2} - \frac{d^2 G}{dx\, dy} - \frac{d^2 H}{dz\, dx} = 4\pi\varepsilon_1 \left(\frac{d^2 F}{d t^2} - \frac{d^2 \phi}{dx\, dt}\right)$$

$$\frac{d^2 G}{d z^2} + \frac{d^2 G}{d x^2} - \frac{d^2 H}{dy\, dz} - \frac{d^2 F}{dx\, dy} = 4\pi\varepsilon_2 \left(\frac{d^2 G}{d t^2} - \frac{d^2 \phi}{dy\, dt}\right)$$

$$\frac{d^2 H}{d x^2} + \frac{d^2 H}{d y^2} - \frac{d^2 F}{dz\, dx} - \frac{d^2 G}{dy\, dz} = 4\pi\varepsilon_3 \left(\frac{d^2 H}{d t^2} - \frac{d^2 \phi}{dz\, dt}\right)$$

Si consideri ora una superficie piana d'onda la quale si propaghi colla velocità B e si trovi, alla fine del tempo t, rappresentata dall' equazione:

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu - B t = d\ ,$$

dove λ, μ, ν sono gli angoli che la sua normale fa cogli assi e d è la sua distanza dall'origine delle coordinate all'origine del tempo. Siano inoltre a, b, c le velocità di propagazione lungo le tre direzioni principali, cosicchè si abbia:

$$a^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\ , \quad b^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\ , \quad c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_3}\ .$$

Se si formano le derivate seconde di F, G, H, ϕ rispetto alla variabile d e queste si designano con F'', G'', H'', ϕ'', si ottiene la seguente terna di equazioni:

$$F''\left(\cos^2\mu + \cos^2\nu - \frac{B^2}{a^2}\right) - G''\cos\lambda\cos\mu - H''\cos\nu\cos\lambda - \frac{B\cos\lambda}{a^2}\,\phi'' = 0$$

$$- F''\cos\lambda\cos\mu + G''\left(\cos^2\nu + \cos^2\lambda - \frac{B^2}{b^2}\right) - H''\cos\mu\cos\nu - \frac{B\cos\mu}{b^2}\,\phi'' = 0$$

1) *Electricity and magnetism*, vol. 2, art. 794.

$$- F'' \cos\nu \cos\lambda - G'' \cos\mu \cos\nu + H'' \left(\cos^2\lambda + \cos^2\mu - \frac{B^2}{c^2}\right) -$$

$$\frac{B \cos\nu}{c^2} \phi'' = 0 \, .$$

Questa terna di equazioni si può trasformare ancora nella seguente:

$$B\,W\,(B\,F'' - \phi'' \cos\lambda) = 0$$

$$B\,W\,(B\,G'' - \phi'' \cos\mu) = 0$$

$$B\,W\,(B\,H'' - \phi'' \cos\nu) = 0$$

purche si ponga:

$$W = \frac{\cos^2\lambda}{B^2 - a^2} + \frac{\cos^2\mu}{B^2 - b^2} + \frac{\cos^2\nu}{B^2 - c^2} \, .$$

Ora le equazioni dell'ultima terna non possono essere soddisfatte ne non dalla condizione:

$$W = 0 \, ;$$

infatti non può essere nulla la velocità B di propagazione dell'onda e, per altra parte, non possono annullarsi i fattori binomi per la ragione che la periodicità della perturbazione esige che ogni volume elementare del mezzo contenga costantemente la stessa quantità di elettricità e quindi che sia:

$$\phi'' = 0 \, .$$

Ciò equivale a ritenere che si abbia:

$$\frac{\cos^2\lambda}{B^2 - a^2} + \frac{\cos^2\mu}{B^2 - b^2} + \frac{\cos^2\nu}{B^2 - c^2} = 0 \, .$$

Questa è appunto l'equazione di elasticità di Fresnel, dalla quale è noto che scaturisce come conseguenza diretta l'equazione della superficie d'onda. Perciò la superficie d'onda della perturbazione elettrica in un mezzo coibente qualunque coincide con quella data dalla teoria meccanica della luce.

Oltre a ciò, se si indicano con α, β, γ gli angoli che fa coi tre assi la direzione della oscillazione elettrica, in virtù delle equazioni (2) si trova:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{F''}{a^2} : \frac{G''}{b^2} : \frac{H''}{c^2} \, ,$$

da cui risulta ancora che l'oscillazione ha luogo tangenzialmente alla superficie dell'onda, cioè che si ha:

$$\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma = 0 \ .$$

Se ne deduce pure che la direzione dell'oscillazione elettrica nel piano tangente alla superficie d'onda è determinata dall'equazione:

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\alpha}(b^2 - c^2) + \frac{\cos\mu}{\cos\beta}(c^2 - a^2) + \frac{\cos\nu}{\cos\gamma}(a^2 - b^2) = 0 \ .$$

Questa formula coincide con quella che Fresnel dedusse dalla teoria meccanica della luce, quando s'intenda che la direzione dell'oscillazione elettrica tenga il posto della linea di vibrazione dell'etere per la luce polarizzata rettilineamente.

Quanto venne fin quì sommariamente ricordato rende agevole la trattazione di un caso molto particolare, che forma il principale argomento di questo lavoro.

Si consideri cioè il passaggio d'un raggio luminoso, polarizzato rettilineamente, dall'aria in un mezzo cristallizzato uniasse, essendo la faccia rifrangente del cristallo normale all'asse ottico. La superficie d'onda è in questo caso costituita da una superficie sferica di raggio a e da una concentrica ellissoide di rivoluzione di raggio equatoriale b e di semiasse polare a, essendo a e b rispettivamente le velocità di propagazione della perturbazione elettrica lungo l'asse ottico del cristallo e lungo una direzione qualunque normale a questo asse; la velocità di propagazione nell'aria è assunta come unità.

Dalla nota costruzione di Huyghens e dalle cose precedentemente esposte risultano immediatamente queste conseguenze:

1ª Ogni raggio incidente entrando nel cristallo sotto l'angolo d'incidenza i dà luogo a due raggi rifratti, ordinario l'uno e l'altro straordinario, che giaciono entrambi nel piano d'incidenza e fanno rispettivamente coll'asse ottico gli angoli r e ρ dati dalle relazioni:

$$\text{sen}\, r = a\, \text{sen}\, i \ ,$$

$$\text{sen}\, \rho = \frac{b^2\, \text{sen}\, i}{\sqrt{a^2 - b^2(a^2 - b^2)\, \text{sen}^2 i}} \ .$$

2ª Il raggio rifratto ordinario coincide colla normale al rispettivo elemento d'onda ordinaria; il raggio rifratto straordinario fa colla normale al suo elemento d'onda l'angolo ω dato da:

$$(5)\quad \cos\omega = \frac{a}{\sqrt{[1+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 i][a^2-b^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 i]}}$$

3ª Preso come piano delle xy il piano d'incidenza, come asse delle x l'asse ottico (positivo nell'interno del cristallo) e come origine delle coordinate il punto d'incidenza, di guisa che sarà piano delle yz la faccia rifrangente del cristallo, gli angoli λ, μ, ν che la normale all'onda elementare ordinaria fa cogli assi coordinati sono rispettivamente determinati da:

$$\cos\lambda = \sqrt{1-a^2\operatorname{sen}^2 i}\ ,\qquad \cos\mu = a\operatorname{sen} i\ ,\qquad \cos\nu = 0\ :$$

mentre per gli angoli λ', μ', ν' fatti cogli assi dalla normale all'onda straordinaria si ha:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\lambda' = \dfrac{\sqrt{1-b^2\operatorname{sen}^2 i}}{\sqrt{1+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 i}}\ ,\qquad \cos\mu' = \dfrac{a\operatorname{sen} i}{\sqrt{1+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 i}}\ , \\ \cos\nu' = 0\ . \end{array}\right.$$

4ª Le oscillazioni elettriche costituenti l'onda ordinaria hanno luogo normalmente al piano d'incidenza, e perciò i coseni degli angoli che la loro direzione fa coi tre assi sono 0, 0, 1. Le oscillazioni elettriche dell'onda straordinaria sono parallele al piano d'incidenza e la loro direzione è tangente alla sezione meridiana dell'elissoide di Huyghens; perciò tale direzione fa coi tre assi angoli, i cui coseni sono:

$$\cos\alpha = \frac{a\operatorname{sen} i}{\sqrt{1+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 i}} = \cos\mu'\ ,$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{1-b^2\operatorname{sen}^2 i}}{\sqrt{1+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 i}} = \cos\lambda'\ ,$$

$$\cos\gamma = \cos\nu' = 0\ .$$

VI.

Il raggio incidente, d'intensità *uno*, sia polarizzato in un piano formante l'angolo θ col piano xy d'incidenza. Il piano dell'onda incidente può essere rappresentato dall'equazione:

$$x \cos i + y \operatorname{sen} i = p \ ,$$

dove p è la sua distanza dal punto d'incidenza alla fine del tempo qualunque t. Per altra parte si è già notato che il flusso elettrico dell'onda incidente, che qui assumeremo come unità, è generalmente rappresentato dalla quantità C della formola (4); esso ha per componenti secondo i tre assi i valori:

$$-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} i \ , \quad \operatorname{sen}\theta \cos i \ , \quad -\cos\theta \ .$$

Quindi per ogni punto (x, y, z) appartenente all'onda incidente le funzioni F, G, H si possono scrivere:

$$F = -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} i \operatorname{sen}\left(\frac{p}{L}T - t\right) ,$$

$$G = \operatorname{sen}\theta \cos i \operatorname{sen}\left(\frac{p}{L}T - t\right) ,$$

$$H = -\cos\theta \operatorname{sen}\left(\frac{p}{L}T - t\right) .$$

Per l'onda riflessa considerata alla distanza p' dall'origine l'equazione del suo piano è:

$$-x \cos i + y \operatorname{sen} i = p' \ .$$

Inoltre sia V il flusso elettrico proprio di tale onda; le componenti del flusso secondo gli assi saranno :

$$V \operatorname{sen} i \operatorname{sen}\psi \ , \quad V \cos i \operatorname{sen}\psi \ , \quad -V\cos\psi \ ,$$

intendendo che ψ designi l'angolo che il piano di polarizzazione del raggio riflesso fa col piano d'incidenza. Perciò le funzioni F, G, H per un punto qualunque dell'onda riflessa avranno i valori:

$$F' = V \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \left(\frac{p'}{L} T - t\right)$$

$$G' = V \cos i \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \left(\frac{p'}{L} T - t\right) ,$$

$$H' = - V \cos \psi \operatorname{sen} \left(\frac{p'}{L} T - t\right) .$$

L'onda rifratta ordinaria essendo polarizzata nel piano d'incidenza, il flusso elettrico u, che la costituisce, è diretto normalmente a tale piano e sono perciò nulle le sue componenti secondo gli assi delle x e delle y. Considerato il piano di quest'onda alla distanza q dall'origine, la sua equazione è:

$$x \cos r + y \operatorname{sen} r = q ,$$

dove giova ricordare che:

$$\cos r = \cos \lambda = \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 i} , \quad \operatorname{sen} r = \cos \mu = a \operatorname{sen} i .$$

E chiamando L_1 la lunghezza d'onda del moto rifratto ordinario, i valori delle solite tre funzioni saranno per ogni punto del piano di quest'onda:

$$F_1 = 0 , \quad G_1 = 0 , \quad H_1 = u_1 \operatorname{sen} \left(\frac{q}{L_1} T - t\right) .$$

In modo analogo si vede che il piano dell'onda rifratta straordinaria distante di q' dall'origine delle coordinate ha per equazione:

$$x \cos \lambda' + y \operatorname{sen} \lambda' = q' ,$$

dove λ' si può esprimere pure in funzione di i in virtù delle formole precedentemente scritte. Inoltre, tenendo conto della direzione già avvertita che quì possiede l'oscillazione elettrica, vedesi che il flusso elettrico u_2 relativo all'onda straordinaria ha per componenti:

$$u_2 \cos \alpha , \quad u_2 \operatorname{sen} \alpha , \; 0 .$$

Chiamando dunque L_2 la lunghezza d'onda straordinaria si potrà scrivere per le solite funzioni:

$$F_2 = u_2 \cos\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{q'}{L_2}T - t\right)$$

$$G_2 = u_2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{q'}{L_2}T - t\right)$$

$$H_2 = 0 \ .$$

Ogni perturbazione elettrica si trasmette in modo continuo dall'aria nel cristallo attraversando in parte la faccia rifrangente di questo ed in parte riflettendosi su di essa; da ciò scaturisce il cosidetto principio di continuità, analogo a quello di cui Fresnel fece pur uso nella sua teoria. Si considerino due punti infinitamente vicini fra di loro e alla faccia rifrangente, ma tali che l'uno di essi si trovi nell'aria e perciò prenda parte alla propagazione dei moti incidente e riflesso, mentre l'altro punto sia nel cristallo e partecipi così alla propagazione dei due moti rifratti. Non essendovi differenza finita fra i flussi elettrici che attraversano due elementi quando la distanza fra questi elementi è infinitesima, la somma $F + F'$ dei valori che la funzione F ha per il primo dei due punti considerati differirà infinitamente poco dalla somma $F_1 + F_2$ dei valori che la stessa funzione ha per il secondo punto. Questa condizione deve pur essere verificata per le derivate parziali prime delle F rispetto alle coordinate x e y e relazioni analoghe collegano i valori di ciascuna delle due altre funzioni G e H ed i valori delle loro derivate prime. Più chiaramente, quando si ponga nel nostro caso:

$$x = 0 \ .$$

si hanno le seguenti tre terne di equazioni:

(7)
$$\begin{cases} F + F' = F_2 \\ G + G' = G_2 \\ H + H' = H_1 \end{cases}$$

(8)
$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} + \dfrac{dF'}{dx} = \dfrac{dF_2}{dx} \\[2ex] \dfrac{dG}{dx} + \dfrac{dG'}{dx} = \dfrac{dG_2}{dx} \\[2ex] \dfrac{dH}{dx} + \dfrac{dH'}{dx} = \dfrac{dH_1}{dx} \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dy}+\dfrac{dF'}{dy}=\dfrac{dF_2}{dy} \\ \dfrac{dG}{dy}+\dfrac{dG'}{dy}=\dfrac{dG_2}{dy} \\ \dfrac{dH}{dy}+\dfrac{dH'}{dy}=\dfrac{dH_1}{dy} \end{cases}$$

Queste nove equazioni non esprimono punto altrettante condizioni distinte e ciò si scorge facilmente se si tiene conto delle note leggi relative alle direzioni dei due raggi rifratti. Così, esaminando la seconda equazione della terna (7), essa si può scrivere:

$$\text{sen}\,\theta\cos i\,\text{sen}\left(\frac{p}{L}T-t\right)+V\cos i\,\text{sen}\,\psi\,\text{sen}\left(\frac{p'}{L}T-t\right)$$
$$=u_2\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\left(\frac{q'}{L_2}T-t\right).$$

Ora, per qualunque valore di t, le lunghezze p, p', q' sono spazi percorsi in egual tempo dalle tre onde, incidente, riflessa e rifratta straordinaria; perciò si ha:

$$\frac{p}{L}=\frac{p'}{L}=\frac{q'}{L_2}.$$

Dunque l'equazione precedente si riduce a:

$$(10)\qquad \text{sen}\,\theta\cos i+V\,\text{sen}\,\psi\cos i=u_2\,\text{sen}\,\alpha.$$

Per altra parte, la seconda equazione della terna (9), quando vi si eseguiscano le operazioni indicate e vi si faccia $x=0$, si presenta sotto la forma:

$$\text{sen}\,\theta\cos i\,\text{sen}\,i\,\frac{T}{L}\cos\left\{\frac{y\,\text{sen}\,i}{L}T-t\right\}+$$
$$V\,\text{sen}\,\psi\cos i\,\text{sen}\,i\,\frac{T}{L}\cos\left(\frac{y\,\text{sen}\,i}{L}T-t\right)=u_2\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\lambda'\frac{T}{L_2}\cos\left(\frac{y\,\text{sen}\,\lambda'}{L_2}T-t\right)$$

Ora, osservando che i e λ' sono gli angoli che colla normale alla faccia rifrangente fanno rispettivamente la normale all'onda incidente e la normale all'onda elementare straordinaria, una nota legge stabilisce:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{L} = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{L_2} \ .$$

Introducendo questa condizione, vedesi che l' ultima equazione coincide colla (10).

Si consideri parimenti la terza equazione della terna (7), la quale è:

$$-\cos\theta \operatorname{sen}\left(\frac{p}{L}T-t\right)-V\cos\psi\operatorname{sen}\left(\frac{p'}{L}T-t\right)=u_1\operatorname{sen}\left(\frac{q}{L_1}T-t\right) ,$$

ossia ancora:

$$\cos\theta + V\cos\psi = -u_1 \ .$$

Questa coincide coll'ultima della terna (9) che è:

$$-\cos\theta \operatorname{sen} i\frac{T}{L}\cos\left(\frac{y\operatorname{sen} i}{L}T-t\right)-V\cos\psi\operatorname{sen} i\frac{T}{L}\cos\left(\frac{y\operatorname{sen} i}{L}T-t\right)$$
$$=u_1\operatorname{sen} r\frac{T}{L_1}\cos\left(\frac{y\operatorname{sen} r}{L_1}T-t\right)$$

poichè si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{L} = \frac{\operatorname{sen} r}{L_1} \ .$$

Mediante considerazioni analoghe estese alle altre equazioni si riconosce che le relazioni distinte, alle quali in appresso si dovrà ricorrere, si possono ridurre alle tre seguenti:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos i(\operatorname{sen}\theta + V\operatorname{sen}\psi) = u_2\operatorname{sen}\alpha \\ &\cos\theta + V\cos\psi = -u_1 \\ &\cos\theta - V\cos\psi = -u_1\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r} \end{aligned} \right.$$

VII.

La determinazione di tutti gli elementi da cui dipendono le leggi della riflessione cristallina esige ancora che si applichi al caso che ora si studia il principio della conservazione dell'energia. Cioè si deve esprimere la condizione che, non essendovi assorbimento o trasformazione in altra forma di energia, l'energia

propria dell'onda luminosa incidente si ripartisce integralmente fra l'onda riflessa e le due rifratte. A tale principio anche Fresnel ricorse esaminando il passaggio del moto vibratorio etereo da un mezzo isotropo in un altro pure isotropo, ed io stesso cercai, nel mio lavoro già citato, di estenderlo pure a certi casi in cui il moto rifratto si propaga in un mezzo anisotropo.

Assumendo ora come guida la teoria elettrica della luce, l'applicazione di questo principio non esige ragionamenti d'indole differente da quelli che s'incontrano nella teoria fresneliana. Corre tuttavia questa diversità, che in quest'ultima teoria l'energia per ogni fascetto luminoso è rappresentata dalla somma delle forze vive animanti, in un istante qualunque, le particelle eteree racchiuse in una porzione prismatica del fascetto la quale abbia per altezza la lunghezza d'onda. Nella nuova teoria invece si deve prendere in considerazione l'energia potenziale elettrodinamica posseduta dal sistema di correnti che occupa il volume del detto prisma e si deve calcolare il potenziale elettrodinamico di tale sistema su se stesso ricorrendo alla sua espressione generale già data:

$$-\frac{1}{2}\iiint dx\,dy\,dz\,(\mathrm{F}u+\mathrm{G}v+\mathrm{H}w) \ .$$

Prendasi perciò sulla superficie rifrangente del cristallo una porzione d'area σ piccolissima e la si consideri come base comune di quattro fascetti luminosi, aventi le direzioni dei quattro raggi incidente, riflesso e due rifratti. Limitando le lunghezze dei fascetti in modo che esse rappresentino le relative lunghezze d'onda L, L, L_1, L_2, ne risultano quattro prismi per ciascuno dei quali si deve esprimere il potenziale elettrodinamico corrispondente. Per ciò che riguarda il prisma appartenente al fascetto incidente le oscillazioni elettriche su di ogni sua sezione retta (d'area $\sigma \cos i$) distante della variabile s da una delle basi del prisma giaciono sul piano della stessa sezione; quindi, indicando con u il flusso elettrico nella direzione stessa delle oscillazioni si avrà per le direzioni normali a questa:

$$v=0\ , \quad w=0\ .$$

Così l'espressione del potenziale per uno straterello del prisma

d'altezza ds si riduce a

$$-\frac{1}{2}\,F\,u\,\sigma\cos i\,ds\ .$$

e per tutto il prisma si ha:

$$P=-\frac{1}{2}\,\sigma\cos i\int_0^L F\,u\,ds$$

Ricorrendo alla terna (2) di equazioni, essa si riduce nel nostro caso alla sola:

$$\Delta F=4\pi u\ ,$$

od ancora a:

$$\frac{d^2F}{ds^2}=4\pi u\ .$$

E siccome la (4) ora diventa:

$$F=\operatorname{sen}\left(\frac{s}{L}\,T-t\right)\ ,$$

perchè si è già preso come unità il valore della costante C per la luce incidente, si avrà:

$$u=\frac{1}{4\pi}\frac{d^2F}{ds^2}=-\frac{T^2}{4\pi L^2}\operatorname{sen}\left\{\frac{s}{L}\,T-t\right\}\ ;$$

epperciò:

$$P=-\frac{1}{2}\,\sigma\cos i\int_0^L F\,u\,ds=\frac{1}{2}\,\frac{T^2\sigma\cos i}{4\pi L^2}\int_0^L ds\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{L}\,T-t\right)\ .$$

Riguardo al prisma appartenente al fascetto riflesso si fanno considerazioni assolutamente analoghe e, avvertendo che per esso il valore della costante C è V, si ha per il suo potenziale elettrodinamico P':

$$P'=\frac{1}{2}\,\frac{T^2\,\sigma\cos i}{4\pi L_1^2}\,u_1^2\int_0^{L_1} ds\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{L_1}\,T-t\right)\ .$$

Si consideri infine il potenziale P_2 relativo al moto rifratto straordinario. Qui le oscillazioni elettriche giaciono ancora nel piano dell'onda, ma non sono più normali al raggio corrispondente, poichè questo raggio fa colla normale al piano d'onda l'angolo ω dato dalla (5). E siccome la s devesi contare lungo la normale

al piano d'onda affinchè si possano ritenere soddisfatte le condizioni $v = 0$, $w = 0$, si dovrà sostituire al prisma di sezione retta $\sigma \cos \rho$ appartenente al fascetto rifratto straordinario un altro prisma la cui sezione retta $\sigma \cos \lambda'$ sia parallela al piano d'onda straordinaria, avvertendo inoltre che le altezze di questi due prismi, i quali sono percorsi dal moto straordinario nello stesso tempo T stanno fra loro nel rapporto: $1 : \cos \omega$. Da ciò si deduce:

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{T^2 \sigma \cos \lambda'}{4\pi L_2^2 \cos \omega} u_2^2 \int_0^{L_2} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_2} T - t\right) .$$

Così l'equazione esprimente la conservazione dell'energia si può scrivere:

$$\frac{\cos i (1 - V^2)}{L^2} \int_0^L ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L} T - t\right) =$$

$$\frac{u_1^2 \cos r}{L_1^2} \int_0^{L_1} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_1} T - t\right) + \frac{u_2^2 \cos \lambda'}{L_2^2 \cos \omega} \int_0^{L_2} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_2} T - t\right) .$$

Ponendo nell'integrale del primo membro di questa equazione:

$$s = L z$$

si ha:

$$\int_0^L ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L} T - t\right) = L \int_0^1 dz \operatorname{sen}^2 (Tz - t) .$$

E ponendo rispettivamente: $s = L_1 z$ e $s = L_2 z$ nei due integrali del secondo membro, si ottiene:

$$\int_0^{L_1} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_1} T - t\right) = L_1 \int_0^1 dz \operatorname{sen}^2 (Tz - t) .$$

$$\int_0^{L_2} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_2} T - t\right) = L_2 \int_0^1 dz \operatorname{sen}^2 (Tz - t) .$$

Sostituendo nell'equazione esprimente la conservazione dell'energia, essa si riduce subito alla forma:

$$\frac{\cos i\,(1-V^2)}{L}=\frac{u_1^2\cos r}{L_1}+\frac{u_2^2\cos\lambda'}{L_2\cos\omega}$$

od anche, per essere:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{L}=\frac{\operatorname{sen} r}{L_1}=\frac{\operatorname{sen}\lambda'}{L_2}\ ,$$

$$(12)\qquad \cos i\,(1-V^2)=\frac{\operatorname{sen} i\cos r}{\operatorname{sen} r}\,u_1^2+\frac{\operatorname{sen} i\cos\lambda'}{\operatorname{sen}\lambda'\cos\omega}\,u_2^2 .$$

VIII.

Le tre equazioni (11) prese insieme alla (12) valgono a determinare pienamente la intensità V^2 e l'azimut ψ di polarizzazione del raggio riflesso per qualunque incidenza e per qualunque posizione del piano di polarizzazione del raggio incidente, la cui intensità è *uno*. Però le espressioni che se ne ricavano non coincidono in generale con quelle che io aveva ottenute nella mia prima Memoria. Ciò del resto è naturale, dacchè io dovetti allora ammettere certi postulati intorno alla propagazione nei cristalli del moto vibratorio etereo, i quali postulati non hanno i loro equivalenti nella teoria elettromagnetica della luce. Così la così detta legge di Malus alla quale ricorsi per ottenere una relazione fra le velocità vibratorie dei due moti rifratti non si può ritenere come esatta in generale ed avvertii allora che la si può accogliere come prossima al vero soltanto in virtù della debole birifrangenza dei cristalli esistenti in natura [1]).

I casi particolari più importanti, nei quali si verifica in modo completo la coincidenza fra i risultati della teoria meccanica della luce e quelli della nuova teoria, sono i due seguenti:

1° Se il piano di polarizzazione della luce incidente coincide col piano d'incidenza, cioè se si pone $\theta=0$ nelle equazioni (11), (12), se ne ricava:

$$\psi=0\ ,\quad u_2=0\ ,\quad V=-\frac{\operatorname{sen}(i-r)}{\operatorname{sen}(i+r)}$$

cioè il raggio rifratto straordinario sparisce, la luce riflessa è

1) Vedi i miei già citati *Studi sulla riflessione cristallina*, pag. 20.

anch'essa polarizzata nel piano d'incidenza ed ha l'intensità determinata della legge di Fresnel pei corpi isotropi;

2° Se l'incidenza è normale, qualunque sia lo stato di polarizzazione della luce incidente, si ha per l'intensità V^2 della luce riflessa il valore

$$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2$$

e per l'intensità dell'unico raggio rifratto allora esistente:

$$\frac{4a^2}{(1+a)^2} .$$

La coincidenza assoluta fra i risultati delle due teorie non ha più luogo per valori qualunque di θ e di i; tuttavia le differenze fra i valori numerici che se ne ricavano per ogni caso speciale sono sempre assai lievi per i mezzi birifrangenti naturali, essendo per questi sempre molto piccole le frazioni $\frac{a-b}{a}$, $\frac{a-b}{b}$. Le maggiori discrepanze s'incontrano quando la luce incidente è polarizzata normalmente al piano d'incidenza. Allora entrambe le teorie prevedono che resta estinto il raggio rifratto ordinario e che, per il raggio riflesso, non è alterato il piano di polarizzazione; ma l'intensità V_1^2 della luce riflessa si trovò, nel mio lavoro precedente, pag. 30, determinata dalla relazione:

$$V_1 = -\frac{\cos i \cos^4 \nu - a \cos \mu}{\cos i \cos^4 \nu + a \cos \mu}$$

essendo: $\cos \mu = \sqrt{1 - b^2 \operatorname{sen}^2 i}$, $\cos \nu = \sqrt{1 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 i}$; invece dalle equazioni (11) e (12) si ricava:

$$V = -\frac{\operatorname{sen} i \cos i - \operatorname{sen} \lambda' \cos \lambda' \cos \omega}{\operatorname{sen} i \cos i + \operatorname{sen} \lambda' \cos \lambda' \cos \omega} .$$

Ora quest'espressione di V non coincide con quella precedente di V_1 se non per il caso di un mezzo monorifrangente, cioè per a eguale a b, poichè allora entrambe assumono il valore

$$-\frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)} ,$$

cioè quel valore che la teoria di Fresnel assegna per mezzi isotropi.

Se si ricordano le già trovate espressioni (5) e (6) per $\cos\lambda'$ e per $\cos\omega$ si vede che l'espressione ora ottenuta di V si può anche scrivere sotto la forma seguente che si può più comodamente confrontare con quella di V_1:

$$V = -\frac{\cos i \cos^4\nu - a \cos\mu \cos\omega \cos^2\nu}{\cos i \cos^4\nu + a \cos\mu \cos\omega \cos^2\nu},$$

dove si ha:

$$\cos\omega \cos^2\nu = \frac{\sqrt{1+(a^2-b^2)\,\text{sen}^2 i}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}(a^2-b^2)\text{sen}^2 i}}.$$

I valori numerici di V e di V_1 differiranno l'un dall'altro tanto meno in ogni caso speciale, quanto più il valore di $\cos\omega \cos^2\nu$, a cagione della piccolezza di a^2-b^2, si accosterà all'unità.



SULLE CONDIZIONI DI RESISTENZA DEI CORPI ELASTICI; NOTA DEL PROF. E. BELTRAMI.

Nella versione francese della *Teoria dell' elasticità* di Clebsch, riveduta e commentata dall' illustre De Saint-Venant, il quale ha recato con tale pubblicazione un nuovo e segnalato servigio agli studiosi di quell' importantissima teoria, si trova riassunto in una nota finale al § 31 (p. 252-282), il metodo già da lungo tempo proposto dallo stesso de Saint-Venant per la ricerca dei limiti di resistenza dei corpi elastici. Questo metodo differisce da quello generalmente seguito, ed accettato anche da Clebsch, per il principio sul quale esso si fonda e che consiste nell' assegnare un limite massimo alle *dilatazioni*, anzichè alle *tensioni*.

Per giustificare questo nuovo principio, De Saint-Venant cita in particolare il caso semplicissimo d' un parallelepipedo rettangolo stirato, con una stessa forza unitaria, secondo una, o secondo due, o secondo tutte tre le direzioni dei suoi assi di figu-

ra; ed osserva che, mentre la tensione massima è, per ipotesi, la stessa in tutti tre i casi, la dilatazione massima è maggiore nel primo che nel secondo, ed è parimente maggiore nel secondo che nel terzo, donde sembra ovvio il concludere che il pericolo di disgregazione sia maggiore nel primo caso che nel secondo e nel terzo.

Ora tale conclusione non mi pare così legittima come per avventura potrebbe credersi a prima giunta. Lo stiramento di un corpo nel senso che diremo longitudinale è accompagnato, come è notissimo, da una contrazione in ogni senso trasversale, contrazione che è parzialmente impedita, od anche mutata in dilatazione, quando il corpo è sottoposto contemporaneamente a stiramenti trasversali; ne segue che la coesione molecolare è indebolita, nel senso longitudinale, più nel primo caso che nel secondo, ma è anche rinforzata, nel senso trasversale, più in quello che in questo, cosicchè non è facile, nè forse possibile, decidere *a priori* circa la prevalenza dell' un effetto sull' altro.

Ma se non si può formulare alcuna precisa conclusione intorno a ciò, parmi tuttavia potersi ammettere come evidente, in base appunto all' esempio molto opportunamente addotto da De Saint-Venant, che la vera misura del cimento a cui è messa la coesione di un corpo elastico non debba essere desunta nè dalla sola tensione massima, nè dalla sola dilatazione massima, ma debba risultare, in un qualche modo, dall' insieme di *tutte* le tensioni, o di *tutte* le dilatazioni che regnano nell'intorno d'ogni punto del corpo.

Ora queste tensioni e queste dilatazioni, rappresentate le une e le altre da sei componenti distinte, sono fra loro legate da relazioni lineari, le quali esprimono che le sei componenti di tensione sono le derivate, rispetto alle sei componenti di deformazione, di un' unica funzione quadratica formata con queste seconde componenti; oppure che le sei componenti di deformazione sono le derivate, rispetto alle sei componenti di tensione, di un'analoga funzione formata con queste ultime componenti. Quest'unica funzione, che ha l' identico valore sotto le due diverse forme ch' essa prende nell'uno e nell' altro caso, è il cosidetto *potenziale d' elasticità* ed ha l'insigne proprietà di rappresentare l'*energia*, riferita all' unità di volume, che il corpo elastico pos-

siede nell'intorno del punto che si considera, energia la quale è equivalente sia al lavoro che l'unità di volume del corpo può svolgere nel restituirsi dallo stato attuale allo stato naturale, sia al lavoro che hanno dovuto svolgere le forze esterne per condurre la detta unità di volume dallo stato naturale all'attuale suo stato di coazione elastica.

Dietro ciò mi pare evidente che la vera misura del cimento a cui è messa, in ogni punto del corpo, la coesione molecolare debba essere data dal valore che assume in quel punto il potenziale unitario d'elasticità, e che a questo valore, anzichè a quello di una tensione o di una dilatazione, si debba prescrivere un limite massimo, per preservare il corpo dal pericolo di disgregazione, limite naturalmente diverso, come nelle ordinarie teorie secondo che si tratti di disgregazione prossima o di remota.

Questa conclusione, giustificata già di per se stessa dal significato dinamico del potenziale d'elasticità, è resa ancor più manifestamente plausibile da una proprietà analitica di questo potenziale, la quale deve certamente dipendere anch'essa dal suddetto significato, benchè non ci sia ancora nota la dimostrazione rigorosa di tale dipendenza [1]).

Voglio alludere alla proprietà che ha il detto potenziale d'essere una funzione quadratica *essenzialmente positiva,* cioè una funzione che non si annulla se non quando *tutte* le sue sei variabili sieno nulle, e che si mantiene maggiore di zero per ogni altra sestupla di valori reali di queste variabili. In virtù di questa proprietà non si può imporre un limite al valore del potenziale d'elasticità senza imporre al tempo stesso un limite a quello di *ciascuna* componente, sia di tensione, sia di deformazione, cosicchè l'uso del detto potenziale come misura della resistenza elastica non contraddice intrinsecamente ai criteri desunti sia dalla considerazione delle sole tensioni, sia da quella delle sole deformazioni. Praticamente poi il criterio desunto dal potenziale ha il grande vantaggio di non esigere la risoluzione preliminare d'alcuna equazione e di ridursi alla discussione d'una formola che non può mai presentare ambiguità di segni.

1) Veggasi nel T. 78 del *Giornale di* Borchardt un lavoro notevole di Lipschitz, dove la proprietà in discorso è dedotta dal postulato della *stabilità*, d'ogni moto vibratorio libero.

Nel caso dei corpi perfettamente isotropi il potenziale d'elasticità Π è espresso, in funzione delle sei componenti di tensione, dalla formola seguente:

$$2\,\mathrm{E}\,\Pi = (t_{xx} + t_{yy} + t_{zz})^2$$
$$+ 2(1+\eta)(t^2_{yz} + t^2_{zx} + t^2_{xy} - t_{yy}\,t_{zz} - t_{zz}\,t_{xx} - t_{xx}\,t_{yy}),$$

nella quale i simboli delle tensioni e quelli delle due costanti d'isotropia E, η sono gli stessi usati da De Saint-Venant. Osserverò di passaggio che il carattere *essenzialmente positivo* di Π è, in questo caso, messo in evidenza dall'espressione equivalente

$$2\,\mathrm{E}\,\Pi = (1+\eta)\left[(s\,\Pi - t_{xx})^2 + (s\,\Pi - t_{yy})^2 + (s\,\Pi - t_{zz})^2 + 2(t^2_{yz} + t^2_{xz} + t^2_{xy})\right]$$

nella quale

$$s = \frac{\sqrt{1+\eta} \pm \sqrt{1-2\eta}}{3\sqrt{1+\eta}}$$

Ogni volta che si ha

$$-1 < \eta < \frac{1}{2}$$

il valore di s è reale e i tre binomj

$$s\,\Pi - t_{xx}, \quad s\,\Pi - t_{yy}, \quad s\,\Pi - t_{zz}$$

non si possono annullare simultaneamente che per

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = 0.$$

La precedente limitazione per η corrisponde esattamente ad un' analoga condizione enunciata da Green (p. 246 dei *Mathematical Papers*) e, a mio avviso, non rigorosamente dimostrata da Ferrers (p. 330 *ibid*).

Ammettendo, con De Saint-Venant, che per i corpi cilindrici o prismatici, ordinariamente considerati, sussistano le equazioni

$$t_{xx} = 0, \quad t_{xy} = 0, \quad t_{yy} = 0.$$

la condizione di coesione è quindi data da

$$\Pi_0 \overline{\overline{<}} \frac{t^2_{zz} + 2(1+\eta)(t^2_{yz} + t^2_{zx})}{2\,\mathrm{E}}$$

dove Π_0 è il massimo valore del potenziale Π. Denotando con R_0, T_0 i massimi valori della tensione unitaria, secondo che il corpo sia soggetto a sola tensione longitudinale, oppure a sola torsione, si hanno di quì le seguenti relazioni fra Π_0, R_0 e T_0:

$$R_0^2 = 2\,E\Pi_0\,, \quad (1+\eta)\,T_0^2 = E\Pi_0\,,$$

in virtù delle quali la precedente condizione può scriversi

$$\text{(a)} \qquad \frac{t^2_{zz}}{R_0^2} + \frac{t^2_{yz} + t^2_{zx}}{T_0^2} \overset{=}{<} 1\,,$$

mentre fra i massimi valori R_0, T_0 delle due specie di tensioni ha luogo la relazione necessaria

$$\text{(a')} \qquad T_0 = \frac{R_0}{\sqrt{2(1+\eta)}}\,.$$

Questa relazione è diversa da quella ottenuta da De Saint-Venant, il quale trova invece

$$T_0 = \frac{R_0}{1+\eta}\,.$$

Il valore assegnato da quest'ultima formola al rapporto $T_0 : R_0$ è maggiore di quello che risulta dalla (a'), poichè η è sempre $< \frac{1}{2}$.

Passando al caso dei corpi dotati di sola isotropia trasversale, caso più specialmente considerato da De Saint-Venant, l'espressione del potenziale per mezzo delle tensioni è data dalla formola

$$2\Pi = \frac{t^2_{zz} - 2\,\eta\, t_{zz}\,(t_{xx} + t_{yy})}{E} + \frac{t^2_{xx} + t^2_{yy} - 2\,\eta'\, t_{xx}\, t_{yy} + 2\,(1+\eta')\, t^2_{xy}}{E'} + \frac{t^2_{yz} + t^2_{zx}}{G}\,,$$

dove E, E' sono i due moduli d'elasticità (longitudinale e trasversale), G è il coefficiente di elasticità tangenziale, ed η η' sono i coefficienti che determinano la contrazione trasversale dovuta rispettivamente ad una dilatazione longitudinale e ad una trasversale. Vi è anche un terzo coefficiente η'', che determina la contrazione longitudinale dovuta ad una dilatazione trasversale, ma questo coefficiente dipende dalle altre costanti per mezzo

della relazione

$$\eta'' = \frac{E'\eta}{E} .$$

Se anche quì ci limitiamo a considerare i corpi cilindrici o prismatici pei quali si ammettono le relazioni di De Saint-Venant, la condizione di coesione si riduce a

$$2\,\Pi_0 \overline{\overline{<}} \frac{t^2_{zz}}{E} + \frac{t^2_{yz} + t^2_{zx}}{G}$$

e quindi di nuovo alla (a), con questa sola differenza, che ora i valori massimi R_0, T_0 delle due specie di tensioni hanno fra loro non più la relazione (a'), ma la

(a'') $$T_0 = R_0 \sqrt{\frac{G}{E}}$$

nella quale il rapporto $G:E$ può prendere qualunque valore, cosicchè anche il rapporto $T_0 : R_0$ può, almeno *a priori*, assumere un valore qualunque.

Finalmente, nel caso più generale di un corpo cilindrico dotato di tre assi d'elasticità, uno dei quali sia diretto nel senso longitudinale, la condizione di coesione ha ancora la forma semplicissima

(b) $$\frac{t^2_{zz}}{R^2_0} + \frac{t^2_{yz}}{T^2_x} + \frac{t^2_{zx}}{T^2_y} \overline{\overline{<}} 1 ,$$

dove R_0, T_x, T_y sono i valori massimi delle tensioni t_{zz}, t_{yz}, t_{zx}. Questi valori sono fra loro legati dalle relazioni

(b') $$T_x = R_0 \sqrt{\frac{G_x}{E}} , \quad T_y = R_0 \sqrt{\frac{G_y}{E}}$$

dove E è il modulo d'elasticità longitudinale e G_x, G_y sono i coefficienti delle elasticità tangenziali. Quando $t_{zz} = 0$ la precedente condizione s'accorda con quella data da De Saint-Venant, pag. 272.

Coglierò quest' occasione per mostrare come si possa ottenere molto facilmente la determinazione completa delle tensioni nei corpi cilindrici a sezione *ellittica*, anche quando questi corpi

abbiano tre assi d'elasticità paralleli ai loro assi di figura [1]). Il processo elementare di cui farò uso consiste nel dimostrare che si può soddisfare a tutte le condizioni del problema prendendo per le sei componenti di tensione altrettante *funzioni di secondo grado* delle coordinate x, y, z.

Sia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'equazione della superficie cilindrica laterale. Le condizioni cui devono soddisfare le componenti di tensione in ogni punto di questa superficie sono

$$\frac{x\,t_{xx}}{a^2}+\frac{y\,t_{xy}}{b^2}=0,\quad \frac{x\,t_{xy}}{a^2}+\frac{y\,t_{yy}}{b^2}=0,\quad \frac{x\,t_{xz}}{a^2}+\frac{y\,t_{yz}}{b^2}=0$$

e rientrano tutte nel tipo

$$\frac{x\phi}{a^2}+\frac{y\psi}{b^2}=0\,.$$

Ora si riconosce facilmente che la forma più generale di due funzioni di secondo grado ϕ e ψ, astrette a soddisfare a quest'equazione in ogni punto della superficie cilindrica, è la seguente:

$$\phi=\frac{\mathrm{H}\Gamma}{2}-\frac{y\Lambda}{b^2}\,,\quad \psi=\frac{\mathrm{K}\Gamma}{2}+\frac{x\Lambda}{a^2}\,,$$

dove H e K sono due costanti, Λ è una funzione *lineare* delle x, y, z e Γ è la funzione di secondo grado

$$\Gamma=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\,.$$

Dietro ciò, se si osserva che nelle due prime equazioni alla superficie la componente t_{xy} fa alternativamente l'ufficio di ψ e di ϕ, si trova subito che le cinque prime componenti di tensione non possono avere che le forme seguenti:

$$t_{xx}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}-a^2\mathrm{D}\frac{y^2}{b^2},\quad t_{xy}=\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}+\mathrm{D}xy,\quad t_{yy}=\frac{\mathrm{C}\Gamma}{2}-b^2\mathrm{D}\frac{x^2}{a^2},$$

$$t_{xz}=\frac{\mathrm{H}\Gamma}{2}-\frac{y\Lambda}{b^2}\,,\quad t_{yz}=\frac{\mathrm{K}\Gamma}{2}+\frac{x\Lambda}{a^2}\,,$$

1) Il metodo è applicabile anche al caso che il *solo asse longitudinale* sia un asse d'elasticità, ma qui, per amore di brevità, mi limito al caso più semplice sovraddetto.

dove A, B, C, D, H, K sono costanti e Λ, Γ hanno i significati suddetti.

Sostituendo queste espressioni nelle due prime equazioni d'equilibrio,

$$\frac{dt_{xx}}{dx}+\frac{dt_{xy}}{dy}+\frac{dt_{xz}}{dz}=0\,,\quad \frac{dt_{xy}}{dx}+\frac{dt_{yy}}{dy}+\frac{dt_{yz}}{dz}=0\,.$$

si trovano le condizioni

$$A=a^2 D,\quad C=b^2 D,\quad B=0,\ \frac{d\Lambda}{dz}$$

tenendo conto delle quali ed aggiungendo il valore dell'ultima componente t_{zz}, quale risulta dalla terza equazione d'equilibrio

$$\frac{dt_{xz}}{dx}+\frac{dt_{yz}}{dy}+\frac{dt_{zz}}{dz}=0\,,$$

si ottengono le espressioni seguenti

$$t_{xx}=\frac{a^2 D}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{3y^2}{b^2}\right),\ t_{xy}=Dxy,\ t_{yy}=\frac{b^2 D}{2}\left(1-\frac{3x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$t_{xz}=\frac{H+Q}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{y}{b^2}(Px+Qy+R),$$

$$t_{yz}=\frac{K-P}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{x}{a^2}(Px+Qy+R),$$

$$t_{zz}=\left(\frac{Hx}{a^2}+\frac{Ky}{b^2}\right)z+\phi(x,y)\,.$$

Queste espressioni soddisfanno a tutte le equazioni di equilibrio ed a quelle relative alla superficie laterale, qualunque sieno le costanti D, H, K, P, Q, R e la funzione $\phi(x,y)$ di secondo grado nelle sole x, y.

Ciò premesso, supponiamo che il corpo abbia tre assi d'elasticità nelle direzioni x, y, z e rappresentiamo con

$$\Pi=\tfrac{1}{2}(A\,t^2_{xx}+Bt^2_{yy}C\,t^2_{zz}+2A'\,t_{yy}\,t_{zz}+2B'\,t_{zz}\,t_{xx}+2C'\,t_{xx}\,t_{yy}$$
$$+A''\,t^2_{yz}+B''\,t^2_{zx}+C''\,t^2_{xy})$$

il potenziale unitario, espresso colle componenti di tensione. Di quì risultano per le sei componenti di deformazione, simboleggiate al modo di De Saint-Venant, le espressioni

$$d_x = A\,t_{xx} + C'\,t_{yy} + B'\,t_{zz}\,,\quad g_{yz} = A''\,t_{yz}\,,$$
$$d_y = C'\,t_{xx} + B\,t_{yy} + A'\,t_{zz}\,,\quad g_{zx} = B''\,t_{zx}\,,$$
$$d_z = B'\,t_{xx} + A'\,t_{yy} + C\,t_{zz}\,,\quad g_{xy} = C''\,t_{xy}\,.$$

Affinchè si possono determinare tre componenti di spostamento u, v, w capaci di generare date componenti di deformazione $d_x, d_y, d_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$, devono essere soddisfatte, come è noto, le sei equazioni differenziali di 2° ordine che risultano dalle due seguenti

$$\frac{d^2 d_y}{dz^2} + \frac{d^2 d_z}{dy^2} = \frac{d^2 g_{yz}}{dy\,dz}\,,\qquad 2\frac{d^2 d_x}{dy dz} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{dg_{yz}}{dx} + \frac{dg_{zx}}{dy} + \frac{dg_{xy}}{dz}\right)$$

colla permutazione circolare delle x, y, z. Sostituendo in queste sei equazioni i precedenti valori delle d_x, d_y ,... e delle t_{xx}, t_{yy},... si trova:

$$C\frac{d^2\phi}{dx^2} = D\left(\frac{3\,b^2A'}{a^2} + B'\right),\quad C\frac{d^2\phi}{dy^2} = D\left(A' + \frac{3\,a^2B'}{b^2}\right),$$

$$\frac{D}{C}\left\{\frac{3\,a^2(AC-B'^2)}{b^2} + \frac{3b^2(BC-A'^2)}{a^2} - 2(A'B'-CC') + CC''\right\} = 0,$$

$$2\,A'H = \quad A''\,Q + \frac{a^2B''}{b^2}(H+3\,Q)\,,$$

$$2\,B'K = -B''\,P + \frac{b^2\,A''}{a^2}(K-3\,P)\,,$$

$$C\,\frac{d^2\phi}{dxdy} = 0\,.$$

Ora il coefficiente C, inverso del modulo d'elasticità longitudinale, non può mai essere nullo; l'espressione

$$\frac{3\,a^2(AC-B'^2)}{b^2} + \frac{3\,b^2(BC-A'^2)}{a^2} - (A'B'-CC') + CC''$$

non potrebbe annullarsi che per qualche valore particolare del rapporto $a:b$ [1]); dunque bisogna porre

$$D = 0\,,\ \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d^2\phi}{dx\,dy} = \frac{d^2\phi}{dy^2} = 0\,.$$

1) E del resto si può dimostrare che quest' espressione si mantiene positiva per ogni valore *reale* del rapporto $a:b$.

La prima di queste condizioni trae con sè le equazioni

$$t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = 0 ,$$

le quali costituiscono il punto di partenza del processo di De Saint-Venant. Le residue tre componenti di tensione prendono le espressioni seguenti:

$$\text{(c)}\qquad \begin{aligned} t_{xz} &= \frac{H+Q}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{y}{b^2}(Px+Qy+L') , \\ t_{yz} &= \frac{K-P}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{x}{a^2}(Px+Qy+L') , \\ t_{zz} &= \left(\frac{Hx}{a^2}+\frac{Ky}{b^2}\right)z+H'x+K'y+L , \end{aligned}$$

dove le costanti H, K, L, H', K', L' sono arbitrarie, mentre le P, Q restano determinate da due delle condizioni testè ottenute e che quì si trascrivono:

$$\text{(c')}\qquad \begin{aligned} a^2 B'' (H+3Q) - b^2 (2A'H - A''Q) &= 0 , \\ b^2 A'' (K-3P) - a^2 (2B'K + B''P) &= 0 . \end{aligned}$$

Le sei costanti arbitrarie H, K, L, H', K', L' sono direttamente legate colle forze da cui il cilindro è sollecitato. Denotando infatti con X, Y, Z le componenti della forza e con M_x, M_y, M_z quelle del momento che risultano dal trasporto delle forze esterne all'origine delle coordinate, si ha, posto $\pi ab = \sigma$,

$$\text{(c'')}\qquad \begin{aligned} &X = \frac{H\sigma}{4} , \qquad Y = \frac{K\sigma}{4} , \qquad Z = L\sigma , \\ &M_x = \frac{K'b^2\sigma}{4} , \qquad M_y = -\frac{H'a^2\sigma}{4} , \qquad M_z = \frac{L'\sigma}{2} . \end{aligned}$$

Per la determinazione delle componenti di spostamento u, v, w si hanno le sei equazioni

$$\frac{du}{dx} = B' t_{zz} , \quad \frac{dv}{dy} = A' t_{zz} , \quad \frac{dw}{dz} = C t_{zz} ,$$

$$\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz} = A'' t_{yz} , \quad \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx} = B'' t_{xz} , \quad \frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy} = 0 ,$$

la cui integrazione è sempre possibile e non presenta più alcuna difficoltà. Per esempio, nel caso della semplice torsione si trova

$$u=-\frac{L'yz}{2}\left(\frac{A''}{a^2}+\frac{B''}{b^2}\right),\quad v=\frac{L'xz}{2}\left(\frac{A''}{a^2}+\frac{B''}{b^2}\right),\quad w=\frac{L'xy}{2}\left(\frac{A''}{a^2}-\frac{B''}{b^2}\right).$$

Per un corpo dotato di sola isotropia trasversale si avrebbe

$$A=B=\frac{1}{E},\quad C=\frac{1}{E},\quad A'=B'=-\frac{\eta}{E},\quad C'=-\frac{\eta'}{E'}$$

$$A''=B''=\frac{1}{G},\quad C''=\frac{2(1+\eta')}{E'},$$

e le costanti precedentemente designate con P, Q avrebbero i valori seguenti:

$$P=\frac{Eb^2+2G\eta a^2}{E(a^2+3b^2)}K,\quad Q=-\frac{Ea^2+2G\eta b^2}{E(b^2+3a^2)}H,$$

donde si deduce

$$H+Q=\frac{E(2a^2+b^2)-2G\eta b^2}{E(b^2+3a^2)}H,\quad K-P=\frac{E(a^2+2b^2)-2G\eta a^2}{E(a^2+3b^2)}K,$$

con che le tensioni (c) sono esprimibili per mezzo delle sole sei costanti essenziali.

Dopo avere scritto quanto precede, ho riconosciuto con piacere che le obbiezioni da me sollevate contro i modi fin quì usati di stabilire le condizioni di coesione erano state formulate, quasi negli stessi termini, dal compianto ing. Castigliano, alle pagine 128 e seguenti della *Théorie de l' équilibre des systèmes élastiques.* Mi è grato il pensare che il dotto ingegnere, il quale aveva riconosciuta tutta l' importanza del concetto di potenziale elastico, avrebbe probabilmente approvata la mia proposta di fondare sovr' esso anche la deduzione delle condizioni anzidette.



SULLA VELOCITÀ DEI RAGGI POLARIZZATI CIRCOLARMENTE NELL'INTERNO DI UN CORPO DOTATO DI POTERE ROTATORIO; MEMORIA DEL PROF. AUGUSTO RIGHI.

La rotazione del piano di polarizzazione che molti corpi trasparenti, sia per loro struttura naturale, sia quando sono posti in un campo magnetico, producono sui raggi che li attraversano dipende da una doppia rifrazione circolare, ossia dal decomporsi del raggio incidente in due raggi circolari inversi, che hanno entro il corpo diversa velocità di propagazione. Ciò è stato da molto tempo dimostrato sperimentalmente da Fresnel pei corpi che, come il quarzo; hanno potere rotatorio naturale, e da me [1]) sei anni fa, pei corpi dotati del potere rotatorio magnetico.

Supponiamo d'avere un corpo che faccia girare le vibrazioni nel senso degli aghi d'un orologio, per esempio un quarzo destrogiro. In virtù della loro diversa velocità di propagazione, i due raggi circolari, l'uno destrogiro l'altro levogiro, nei quali si decompone il raggio incidente a vibrazioni rettilinee, si ricomporranno all'uscita dal quarzo, generando un raggio a vibrazioni rettilinee girate verso destra, per cui il raggio circolare levogiro giunge all'uscita dal quarzo con un certo ritardo di fase, relativamente al raggio destrogiro.

Se ne deduce che il raggio destrogiro possiede entro il quarzo una velocità maggiore di quella del levogiro. Ciò può dimostrarsi colle formule date nel mio lavoro citato [2]); per cui riprodurrò qui con maggiori dettagli le formole stesse.

Sia

$$x = a \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

la vibrazione all'ingresso del quarzo, che supporremo diretta orizzontalmente secondo l'asse delle x; ossia denotiamo con x la di-

1) Memorie della R. Accademia di Bologna, serie 3., t. VIII, pag. 625. — *Nuovo Cimento*, Maggio 1878, pag. 212.

2) Memorie della R. Accademia di Bologna, l. c. pag. 633. — *Nuovo Cimento*, l. c. pag. 222. — Nelle esperienze esposte in questa Memoria, mi occupai solo di dimostrare che è diversa la velocità di propagazione, entro un corpo dotato di potere rotatorio magnetico, dei raggi polarizzati circolarmente in un senso o nell'altro.

stanza all'istante t, della particella vibrante dalla sua posizione d'equilibrio, che si prende per origine delle coordinate, essendo a l'ampiezza della vibrazione, T la durata d'ogni vibrazione.

La vibrazione data potrà essere surrogata evidentemente, come si fa di solito, dalle quattro seguenti:

$$x_1 = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \qquad x_2 = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

$$y_1 = \frac{a}{2} \cos \frac{2\pi t}{T} \qquad y_2 = -\frac{a}{2} \cos \frac{2\pi t}{T},$$

le quali possono considerarsi come formanti un raggio circolare destrogiro (x_1, y_1), ed un levogiro (x_2, y_2), entrambi d'ampiezza $\frac{a}{2}$

Supponiamo ora che v_1 sia la velocità entro il quarzo del raggio destrogiro, v_2 quella del levogiro, ed l la lunghezza del quarzo che viene attraversata dalla luce. Cerchiamo le equazioni rappresentative dei due raggi circolari all'uscita dal quarzo.

Il raggio destrogiro percorrerà il quarzo in un tempo $\frac{l}{v_1}$ ed il levogiro in un tempo $\frac{l}{v_2}$. La posizione all'istante t della particella vibrante che si trova sulla faccia di uscita dal quarzo, e sul raggio destrogiro, relativamente alla sua posizione d'equilibrio, non sarà altro che la posizione che occupò, relativamente alla sua posizione d'equilibrio, la particella che si trova sulla faccia d'ingresso, in un tempo precedente l'attuale dell'intervallo $\frac{l}{v_1}$. Quindi basterà nei valori di x_1 ed y_1 cangiare t in $t - \frac{l}{v_1}$ per avere la posizione della particella vibrante sul raggio destrogiro nell'istante t ed all'uscita dal quarzo. Analogamente si dica pel raggio levogiro. Per cui le vibrazioni circolari emergenti saranno rappresentate dalle equazioni:

$$x_1' = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l}{v_1}\right) \qquad x_2' = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l}{v_2}\right)$$

$$y_1' = \frac{a}{2} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l}{v_1}\right) \qquad y_2' = -\frac{a}{2} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l}{v_2}\right)$$

essendo x_1', y_1' le componenti rettilinee del destrogiro, x_2', y_2'

quelle del levogiro. Queste formole, si noti bene, danno la posizione del punto vibrante nei due raggi circolari, *per un medesimo istante t.* Potremo dunque riunirle in due vibrazioni rettilinee secondo gli assi, l'una $X = x_1' + x_2'$, e l'altra $Y = y_1' + y_2'$. Mettendo in X ed Y i valori trovati per x_1', x_2', y_1', y_2', ed approfittando delle formole trigonometriche che trasformano le somme in prodotti, avremo:

$$X = \quad a \cos \frac{\pi l}{T}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi l}{T}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) \right\}$$

$$Y = -a \operatorname{sen} \frac{\pi l}{T}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi l}{T}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) \right\}$$ [1])

È chiaro che queste due vibrazioni rettilinee non sono altro che le due componenti secondo gli assi d'un'unica vibrazione

$$a \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi l}{T}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) \right\},$$

che fa coll'asse delle x un angolo θ dato da

$$\theta = \frac{\pi l}{T}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right),$$

il qual angolo è misurato a partire dall'asse suddetto ed andando in senso destrogiro, stante il segno — di Y.

Supponiamo che sia $v_1 > v_2$. Allora θ sarà positivo, e la rotazione delle vibrazioni sarà in senso destrogiro. Se invece fosse $v_2 > v_1$, θ cambierebbe segno, Y diventerebbe positivo, e la rotazione sarebbe verso sinistra.

Dunque in un quarzo destrogiro è maggiore la velocità d'un raggio destrogiro, di quella d'un levogiro. E siccome il periodo T è sempre costante, sarà pure in un tal quarzo maggiore la lunghezza d'onda pel raggio destrogiro che pel levogiro.

Nel suo celebre trattato, il Maxwell espone un ragionamento che a prima giunta sembra inoppugnabile, e secondo il quale la maggior lunghezza d'onda entro un quarzo destrogiro, spetterebbe invece al raggio levogiro. Ecco una traduzione fedele del ragionamento di Maxwell [2]).

1) Nella mia Memoria citata manca per errore tipografico il segno — nella seconda di queste formule.

2) *A treatise on Electricity and Magnetism;* t. II, p. 402, art. 812.

« Possiamo tuttavia esprimere il fenomeno della rotazione del piano di polarizzazione nel modo seguente: — Un raggio polarizzato cade sul mezzo. Esso equivale a due raggi polarizzati circolarmente, uno destrogiro, l'altro levogiro (rispetto all'osservatore). Quindi, dei due raggi polarizzati circolarmente, quello che è destrogiro deve avere la sua fase accelerata rispetto all'altro durante il suo passaggio attraverso al mezzo.

« In altre parole, il raggio destrogiro ha compiuto un maggior numero di vibrazioni, e quindi ha una minor lunghezza d'onda, entro il quarzo, che il levogiro, il quale ha lo stesso periodo.

« Questo modo di stabilire ciò che accade è affatto indipendente da qualsiasi teoria della luce, giacchè quantunque facciamo uso di termini quali lunghezza d'onda, polarizzazione circolare ecc., che possono nella nostra mente associarsi ad una particolar forma della teoria ondulatoria, il ragionamento è indipendente da questa associazione, e dipende solo da fatti provati coll'esperienza. »

È esatto che il raggio destrogiro esca dal corpo che fa girare a destra il piano di polarizzazione, colla fase accelerata, ma è opposta al vero la conseguenza che ne trae il Maxwell, e cioè che il raggio medesimo abbia compiuto entro il corpo, un numero di vibrazioni maggiore del numero di quelle fatte dal raggio levogiro.

L'ammettere questa conseguenza equivale al ritenere tacitamente che la vibrazione rettilinea all'uscita dal quarzo, risulti dalla composizione delle coordinate della particella vibrante nei due moti circolari, le quali corrispondano ad istanti diversi, ciò che evidentemente non è lecito fare.

Infatti, ammettiamo per un momento col Maxwell che la lunghezza d'onda entro il quarzo, e per conseguenza anche la velocità di propagazione, del raggio destrogiro, sia minore di quella del levogiro, e consideriamo le particelle d'etere che si trovano sulla retta percorsa dal raggio luminoso entro il quarzo. La prima particella, cioè quella che è all'ingresso del quarzo, sarà animata dalla vibrazione rettilinea incidente, e questa la immagineremo surrogata da due vibrazioni circolari l'una destrogira e l'altra levogira. La vibrazione destrogira si trasmetterà succes-

sivamente a tutta la fila di particelle fino all'ultima, cioè fino a quella che trovasi all'uscita dal quarzo, e lo stesso accadrà della vibrazione levogira. E siccome la destrogira ha minor velocità di propagazione della levogira, quando il moto giunge all'ultima particella, si saranno compiute lungo la fila più vibrazioni destrogire che levogire, e perciò la particella medesima sarà in ritardo di fase nel suo moto levogiro, rispetto al suo moto destrogiro. Se fosse lecito comporre questi due movimenti, ciò che tacitamente si fa col ragionamento di Maxwell, essi darebbero appunto una vibrazione rettilinea girata a destra.

Ma questi due moti ai quali prende parte l'ultima particella, sono partiti simultaneamente da quella che è all'ingresso del quarzo; ed essendo diversa la velocità con cui si propagano, le coordinate che si verrebbero a comporre, corrispondono evidentemente ad istanti diversi di tempo. Al contrario, per avere il moto vibratorio risultante della particella che trovasi all'uscita dal quarzo, bisogna tener conto delle posizioni in cui essa deve trovarsi in virtù di ciascuno dei moti componenti in un medesimo istante, ciò che precisamente si fa nella semplicissima analisi esposta più sopra, la quale ha poi il pregio di determinare quantitativamente la rotazione del piano di polarizzazione.

Ma si può con un semplice ragionamento prevedere quale sia dei due raggi circolari, quello che ha la maggior velocità di propagazione, entro un quarzo destrogiro. Perciò basta rammentare che quando un moto vibratorio si propaga in una data direzione da una particella A ad un'altra B, la posizione occupata ad un dato istante dalla particella B, relativamente alla sua posizione d'equilibrio, non è altro che la posizione che rispetto alla propria posizione d'equilibrio occupava la particella A ad un'epoca anteriore, che precede l'istante attuale d'un intervallo, eguale al tempo impiegato nella propagazione del moto da A a B. Più piccola è la velocità di propagazione del moto vibratorio, più grande è questo tempo, e quindi più in ritardo si trova nel suo moto la particella B. Ora, all'uscita da un quarzo destrogiro, il raggio levogiro è in ritardo rispetto al destrogiro. Esso deve dunque aver impiegato più tempo ad attraversare il quarzo, e perciò la velocità del destrogiro deve essere maggiore di quella

del levogiro; conclusione questa opposta a quella dedotta dal Maxwell.

Il ragionamento di questo Autore è dunque inesatto ed anche la figura tracciata nella pagina 403, ove termina il brano tradotto più sopra, deve modificarsi.

Non credo che altri abbia fatto prima di me questa rettificazione all'asserzione di Maxwell, giacchè anche il sig. Fitzgerald [1]) in una sua Memoria, della quale per un mio lavoro in corso ho dovuto occuparmi, riproduce il ragionamento del Maxwell, e se ne serve per stabilire i principî d'una sua teoria destinata a spiegare i fenomeni scoperti dal Kerr nella riflessione della luce polarizzata sul polo d'una calamita.



SOPRA L'EQUILIBRIO DI UN CORPO ELASTICO ISOTROPO; DEL DOTT. CARLO SOMIGLIANA [2]).

IV.

Sia S uno spazio limitato da due piani paralleli, perpendicolari all'asse delle z, $z=c$, che chiameremo σ_1, e $z=-c$ che chiameremo σ_2. Sia m un punto situato entro S di coordinate x' y' z'; m_0 l'immagine di m rispetto al piano σ_1, m_1' l'immagine di m_0 rispetto a σ_2, ecc.; sia m_0' l'immagine di m rispetto al piano σ_2, m_1 l'immagine di m_0' rispetto a σ_1, ecc. Otterremo così le due serie di punti: m_0, m_1, m_2, ... situati sulla parte positiva della parallela all'asse z condotta per m, e m_0', m_1', m_2',... situati sulla parte negativa, e tutti esterni ad S. Chiamando z_0, z_1, z_2,... le ordinate z dei primi, e z_0', z_1', z_2',... quelle dei secondi, abbiamo

$$(24) \quad z_n=2(n+1)c-(-1)^n z' \qquad z_n'=-2(n+1)c-(-1)^n z'$$

Poniamo

$$r_n=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z_n-z)^2} \quad r_n'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z_n')^2};$$

1) *Phil. Mag.* supplement june 1877, p. 529.
2) *Continuazione.* V. pag. 91.

dalle (24) abbiamo

$$z_{n+1} - c = c - z_n' \qquad - c - z_n' = z_n + c$$

e quindi, indicando con $r_{n,c}$, $r_{n,-c}$, $r'_{n,c}$, $r'_{n,-c}$ i valori di r_n r'_n per $z = c$, $z = -c$,

$$r_{n+1,c} = r'_{n,c} \qquad r'_{n+1,-c} = r_{n,-c}.$$

Se ora $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, abbiamo sopra σ_1

$$r = r_0$$

$$(25) \quad \frac{d\frac{1}{r}}{dx} = \frac{d\frac{1}{r_0}}{dx} \qquad \frac{d\frac{1}{r}}{dy} = \frac{d\frac{1}{r_0}}{dy} \qquad \frac{d\frac{1}{r}}{dz} = -\frac{d\frac{1}{r_0}}{dz}$$

e sopra σ_2

$$(25') \quad \frac{d\frac{1}{r}}{dx} = \frac{d\frac{1}{r_0'}}{dx} \qquad \frac{d\frac{1}{r}}{dy} = \frac{d\frac{1}{r_0'}}{dy} \qquad \frac{d\frac{1}{r}}{dz} = -\frac{d\frac{1}{r_0'}}{dz}.$$

Osservando ora che nella derivata d'ordine i di $\frac{1}{r_n}$ o $\frac{1}{r_n'}$ rapporto a z tutti i termini contengono la differenza $z_n - z$, o $z - z_n'$ elevata ad una potenza pari o ad una potenza dispari secondo che i è pari o dispari, abbiamo sopra σ_1

$$(26) \quad \frac{d^{i+1}\frac{1}{r_{n+1}}}{dx\,dz^i} = (-1)^i \frac{d^{i+1}\frac{1}{r_n'}}{dx\,dz^i}, \qquad \frac{d^{i+1}\frac{1}{r_{n+1}}}{dy\,dz^i} = (-1)^i \frac{d^{i+1}\frac{1}{r_n'}}{dy\,dz^i},$$

$$\frac{d^{i+1}\frac{1}{r_{n+1}}}{dz^{i+1}} = (-1)^{i+1} \frac{d^{i+1}\frac{1}{r_n'}}{dz^{i+1}},$$

e sopra σ_2

$$(26') \quad \frac{d^{i+1}\frac{1}{r'_{n+1}}}{dx\,dz^i} = (-1)^i \frac{d^{i+1}\frac{1}{r_n}}{dx\,dz^i}, \qquad \frac{d^{i+1}\frac{1}{r'_{n+1}}}{dy\,dz^i} = (-1)^i \frac{d^{i+1}\frac{1}{r_n}}{dy\,dz^i},$$

$$\frac{d^{i+1}\frac{1}{r'_{n+1}}}{dz^{i+1}} = (-1)^{i+1} \frac{d^{i+1}\frac{1}{r_n}}{dz^{i+1}}.$$

Consideriamo ora le funzioni

$$\phi_n = \log(z_n - z + r_n) \qquad \phi_n' = \log(z - z_n' + r_n'):$$

avremo

$$(27) \qquad \frac{d\phi_n}{dz} = -\frac{1}{r_n} \qquad \frac{d\phi_n'}{dz} = \frac{1}{r_n'}$$

$$\Delta_2 \phi_n = 0 \qquad \Delta_2 \phi_n' = 0$$

e le ϕ_n ϕ_n' saranno funzioni monodrome, finite e continue insieme alle loro derivate entro lo spazio S. Per le (27), le equazioni (26) (26') divengono rispettivamente

$$(28) \quad \frac{d^{i+2}\phi_{n+1}}{dx\,dz^{i+1}} = (-1)^{i+1} \frac{d^{i+2}\phi_n'}{dxdz^{i+1}} \qquad \frac{d^{i+2}\phi_{n+1}}{dy\,dz^{i+1}} = (-1)^{i+1} \frac{d^{i+2}\phi_n'}{dydz^{i+1}}$$

$$\frac{d^{i+2}\phi_{n+1}}{dz^{i+2}} = (-1)^i \frac{d^{i+2}\phi_n'}{dz^{i+2}}$$

$$(28') \quad \frac{d^{i+2}\phi'_{n+1}}{dxdz^{i+1}} = (-1)^{i+1} \frac{d^{i+2}\phi_n}{dxdz^{i+1}} \qquad \frac{d^{i+2}\phi'_{n+1}}{dydz^{i+1}} = (-1)^{i+1} \frac{d^{i+2}\phi_n}{dydz^{i+1}}$$

$$\frac{d^{i+2}\phi'_{n+1}}{dz^{i+2}} = (-1)^i \frac{d^{i+2}\phi'_n}{dz^{i+2}}.$$

Consideriamo ora un corpo elastico isotropo che occupi lo spazio S. Le (5) in questo caso prendono ancora la forma delle (11), eccetto che gli integrali estesi a σ vanno estesi a tutte e due le faccie σ_1 σ_2, e sulla prima abbiamo $dn = -dz$, sulla seconda $dn = dz$.

Supponendo che siano date le forze superficiali L M N, cominciamo a calcolare l' integrale

$$\mp \int_\sigma \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + v \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + w \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\sigma$$

che comparisce nella espressione della w; il segno superiore vale sopra σ_1, l' inferiore sopra σ_2.

Prendiamo gli spostamenti

$$
(29) \qquad
\begin{aligned}
a_{in} &= (z-c)\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dx\,dz^{i+1}} + \frac{1}{2\alpha}\,\frac{d^{i+1}\phi_n}{dx\,dz^{i}} \\
b_{in} &= (z-c)\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dy\,dz^{i+1}} + \frac{1}{2\alpha}\,\frac{d^{i+1}\phi_n}{dy\,dz^{i}} \\
c_{in} &= (z-c)\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dz^{i+2}} - \frac{1}{2\alpha}\,\frac{d^{i+1}\phi_n}{dz^{i+1}}
\end{aligned}
$$

che soddisfano alle equazioni dell' equilibrio per $X=Y=Z=0$.

Se poniamo

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{in}(z) &= \mu\left(\frac{da_{in}}{dz}+\frac{dc_{in}}{dx}\right) = 2\mu(z-c)\,\frac{d^{i+3}\phi_n}{dx\,dz^{i+2}} + \mu\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dx\,dz^{i+1}} \\
M_{in}(z) &= \mu\left(\frac{db_{in}}{dz}+\frac{dc_{in}}{dy}\right) = 2\mu(z-c)\,\frac{d^{i+3}\phi_n}{dy\,dz^{i+2}} + \mu\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dy\,dz^{i+1}} \\
N_{in}(z) &= 2\left(\lambda\Theta_{in}+\mu\frac{dc_{in}}{dz}\right) = 2\mu(z-c)\,\frac{d^{i+3}\phi_n}{dz^{i+3}} - \mu\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dz^{i+2}},
\end{aligned}
$$

avremo che le forze superficiali, che produrrebbero nel corpo S gli spostamenti a_{in}, b_{in}, c_{in}, hanno per componenti sopra σ_1

$$
\Lambda_{in}(c)\,, \qquad M_{in}(c)\,, \qquad N_{in}(c)
$$

e sopra σ_2

$$
-\Lambda_{in}(c)\,, \qquad -M_{in}(c)\,, \qquad -N_{in}(c)\,.
$$

Consideriamo ora anche gli spostamenti

$$
(30) \qquad A_{in} = -\frac{1}{2}\,\frac{d^{i+1}\phi_n}{dx\,dz^{i+1}} \qquad B_{in} = -\frac{1}{2}\,\frac{d^{i+1}\phi_n}{dy\,dz^{i+1}} \qquad C_{in} = -\frac{1}{2}\,\frac{d^{i+1}\phi_n}{dz^{i+2}}\,,
$$

che evidentemente soddisfano alle equazioni dell' equilibrio per $X=Y=Z=0$, e pei quali si ha

$$
\Lambda_{in}(z) = -\mu\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dx\,dz^{i+1}} \qquad M_{in}(z) = -\mu\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dy\,dz^{i+1}} \qquad N_{in}(z) = -\mu\,\frac{d^{i+2}\phi_n}{dz^{i+1}}\,.
$$

Mediante gli spostamenti (29) (30) possiamo costruire gli spostamenti $\xi_n^{(3)}$ $\eta_n^{(3)}$ $\zeta_n^{(3)}$ che sono prodotti in un corpo indefinito, limitato dal piano σ_1 e che si estende dalla parte negativa dell' asse delle z, dalle forze superficiali

$$\Lambda^{(3)}_{n,c} = \mu \sum_0^n {}_i\, \varepsilon_{in} (-1)^{i+n} \frac{d^{i+2}\phi_n}{dx dz^{i+1}}$$

$$M^{(3)}_{n,c} = \mu \sum_0^n {}_i\, \varepsilon_{in} (-1)^{i+n} \frac{d^{i+2}\phi_n}{dy dz^{i+1}}$$

$$N^{(3)}_{n,c} = -\mu \sum_0^n {}_i\, \varepsilon_{in} \frac{d^{i+2}\phi_n}{dz^{i+2}},$$

ove le ε_{in} sono costanti positive che determineremo in seguito. Basterà prendere per n pari ed uguale a $2m$

$$\xi^{(3)}_{2m} = \sum_0^m {}_i\, (\varepsilon_{2i,2m}\, a_{2i,2m} + \varepsilon_{2i+1,2m}\, A_{2i+1,2m})$$

$$\eta^{(3)}_{2m} = \sum_0^m {}_i\, (\varepsilon_{2i,2m}\, b_{2i,2m} + \varepsilon_{2i+1,2m}\, B_{2i+1,2m})$$

$$\zeta^{(3)}_{2m} = \sum_0^m {}_i\, (\varepsilon_{2i,2m}\, c_{2i,2m} + \varepsilon_{2i+1,2m}\, C_{2i+1,2m})$$

ritenendo $\varepsilon_{in} = 0$ per $i > n$; e per n dispari e uguale a $2m+1$

$$\xi^{(3)}_{2m+1} = \sum_0^m {}_i\, (\varepsilon_{2i,2m+1}\, A_{2i,2m+1} + \varepsilon_{2i+1,2m+1}\, a_{2i+1,2m+1})$$

$$\eta^{(3)}_{2m+1} = \sum_0^m {}_i\, (\varepsilon_{2i,2m+1}\, B_{2i,2m+1} + \varepsilon_{2i+1,2m+1}\, b_{2i+1,2m+1})$$

$$\zeta^{(3)}_{2m+1} = \sum_0^m {}_i\, (\varepsilon_{2i,2m+1}\, C_{2i,2m+1} + \varepsilon_{2i+1,2m+1}\, c_{2i+1,2m+1}).$$

Le forze $\Lambda_{n,-c}$ $M_{n,-c}$ $N_{n,-c}$ che applicate sopra la faccia σ_2 manterrebbero ancora l'equilibrio, quando il corpo venisse limitato da questo piano, sono per n pari

$$\Lambda^{(3)}_{2m,-c} = -\mu \sum_0^{2m} {}_i\, \varepsilon_{i,2m} (-1)^i \frac{d^{i+2}\phi_{2m}}{dx dz^{i+1}} + 4\mu c \sum_0^m {}_i\, \varepsilon_{2i,2m} \frac{d^{2i+3}\phi_{2m}}{dx dz^{2i+2}}$$

$$M^{(3)}_{2m,-c} = -\mu \sum_0^{2m} {}_i\, \varepsilon_{i,2m} (-1)^i \frac{d^{i+2}\phi_{2m}}{dy dz^{i+1}} + 4\mu c \sum_0^m {}_i\, \varepsilon_{2i,2m} \frac{d^{2i+3}\phi_{2m}}{dy dz^{2i+2}}$$

$$N^{(3)}_{2m,-c} = \mu \sum_0^{2m} {}_i\, \varepsilon_{i,2m} \frac{d^{i+2}\phi_{2m}}{dz^{i+2}} + 4\mu c \sum_0^m {}_i\, \varepsilon_{2i,2m} \frac{d^{2i+3}\phi_{2m}}{dz^{2i+3}}.$$

e per n dispari

$$\Lambda^{(3)}{}_{2m+1,-c} = -\mu \sum_{0}^{2m+1} {}_i\, \varepsilon_{i,2m+1} (-1)^{i+1} \frac{d^{i+2}\phi_{2m+1}}{dx\,dz^{i+1}} + 4\mu c \sum_{0}^{m} {}_i\, \varepsilon_{2i+1,2m+1} \frac{d^{2i+4}\phi_{2m+1}}{dx\,dz^{2i+3}}$$

$$M^{(3)}{}_{2m+1,-c} = \ldots\ldots$$

$$N^{(3)}{}_{2m+1,-c} = \mu \sum_{0}^{2m+1} {}_i\, \varepsilon_{i,2m+1} \frac{d^{i+2}\phi_{2m+1}}{dz^{i+2}} + 4\mu c \sum_{0}^{m} {}_i\, \varepsilon_{2i+1,2m+1} \frac{d^{2i+4}\phi_{2m+1}}{dz^{2i+4}}$$

(*Continua*)

RIVISTA

SUNTI di A. STEFANINI.

Ann. der Phys. und Chem. von G. Wied. Vol. XXIV. 1885.

1. — O. LEHMANN. *Sul punto di fusione di corpi in contatto fra loro e sull' elettrolisi dell' ioduro d' argento.* — Esaminando col microscopio il processo della fusione di due sostanze poste a contatto fra loro, e con un metodo che fu già descritto negli annali del Wiedemann pel 1881, l' A. ha potuto stabilire che il semplice contatto di due corpi che allo stato liquido sono miscibili fra loro, basta per abbassarne il punto di fusione, e che il prodotto resultante dalla solidificazione del miscuglio dei corpi fusi non è omogeneo; ma è invece un miscuglio meccanico, anche se le sostanze adoprate sono isomorfe, o almeno sono fino a un certo grado morfotrope.

L' A. ha anche osservato che l'ioduro d'argento cristallizzato può condurre la corrente elettrica in modo, che l' argento si muova nella direzione della corrente negativa, senza che perciò sia alterata la struttura del cristallo. Può esso servire anche da elettrodo, e scomporsi elettroliticamente; ma allora soffre una distensione nella direzione delle linee di corrente.

Una tavola litografica che accompagna la Memoria, riproduce le belle apparenze osservate dall' A. nel corso dei suoi studi.

W. VON BEZOLD. *Su una nuova specie di figure di coesione.* — Sono i fenomeni osservati ponendo, con una penna o con una pinzetta, una goccia d'inchiostro velocigrafico sulla superficie dell'acqua contenuta in un recipiente cilindrico. Alla superficie la goccia si espande regolarmente, e nella massa dell' acqua approfonda lentamente formando dei filamenti verticali che rivelano, coi loro movimenti, le più tenui correnti del liquido. Anche avvicinando lateralmente al recipiente una mano, quei filamenti ne sembrano attratti, e l' A. osserva che questi

movimenti potrebbero servire, meglio della pila termoelettrica, a mostrare in lezione certi fenomeni di calorico raggiante.

L. Boltzmann. *Sulla possibilità di fondare una teoria cinetica dei gas su forze solamente attrattive.* — In tutte le teorie cinetiche dei gas le forze molecolari sono supposte repulsive, dacchè anche l'ipotesi delle sfere elastiche si riduce, dal punto di vista meccanico, a supporre fra le molecole delle forze repulsive che si annullino per distanze maggiori della somma dei loro raggi. Il Boltzmann osserva peraltro che dalle ricerche di Joule sull'efflusso dei gas senza spesa di lavoro, ne segue che fra le loro molecole vi devono essere delle forze attrattive. Egli si domanda perciò se l'ipotesi di sole forze attrattive possa bastare a rendersi ragione dei fenomeni che presentano i gas, ed osserva che due casi possono trattarsi facilmente col calcolo: quello cioè corrispondente all'ipotesi delle sfere elastiche, e quello corrispondente alla legge del Maxwell. Nel primo caso, ammettendo che fra due molecole non si eserciti nessuna forza finchè sono a distanza maggiore di una certa grandezza δ, e che per distanze minori di δ si eserciti fra esse una forza attrattiva infinitamente grande, regolata da una legge qualunque, ma tale che la forza cessi appena che la distanza sia divenuta minore di un' altra grandezza ε, si giunge a resultati tali che, se non permettono di asserire che tale ipotesi è vera, mostrano almeno la possibilità di fondare una teoria dei gas senza ricorrere a forze repulsive. Nel secondo caso, ammettendo che fra due molecole vi sia una forza attrattiva inversamente proporzionale alla quinta potenza della loro distanza, si trova che tutte le formule del Maxwell restano applicabili, con un semplice cambiamento nelle costanti.

O. Chwolson. *Sulla calibrazione delle cassette di resistenza Siemens e Halske.* — L'A. indica come si possano determinare sperimentalmente le correzioni dovute al fatto che i capi della spirale di ciascun rocchetto, si uniscono, nelle cassette Siemens, due a due a un medesimo filo di rame.

F. Kohlrausch. *Conducibilità elettrica dell' acqua distillata nel vuoto.* — Le divergenze nei valori ottenuti per la conducibilità dell' acqua che sia stata distillata in vari modi, e che sia stata conservata più o meno a lungo in recipienti metallici o di vetro, mostrarono già da gran tempo quanto difficile sia ottener dell'acqua chimicamente pura. Una di tali difficoltà sembra consistere nella presenza dell' aria; perchè l' acqua distillata nel vuoto presenta una conducibilità minore di quella ottenuta con altri metodi.

Anche nel vuoto la conducibilità dell'acqua distillata non si mantiene costante; così in uno dei recipienti di vetro che servì all'A., una porzione di acqua che presentava la resistenza di 7×10^{8} U. S., dopo 5 minuti che era stata distillata non presentava che una resistenza di 4×10^{8} e dopo 15 ore di sole 28×10^{5} U. S. In altri recipienti questa variazione era più lenta.

La conducibilità media dell'acqua nel vuoto fu trovata 25×10^{-12} di quella del mercurio. Un corpo che ha una conducibilità così piccola, può quindi ritenersi, per l'elettricità voltaica, come isolante.

G. Kirchhoff. *Sulle variazioni di forma che subisce un solido elastico quando si polarizza magneticamente o dielettricamente.* — Memoria d'indole matematica, che ha per scopo di applicare ai corpi solidi le considerazioni che Helmholtz fece sulle forze, che agiscono sulle particelle dei fluidi polarizzati magneticamente e dielettricamente.

A. Schuster. *Sulla scarica elettrica nei gas.* — In altro lavoro. (*Proc. Roy. Soc.* 37, 1884), l'A. ha cercato di spiegare le apparenze che si osservano al catodo, supponendo che ivi le molecole si scompongano in atomi, dei quali quelli dell'elemento elettronegativo sieno slanciati con gran velocità dal catodo stesso. Ora egli discute alcune obiezioni fattegli dal Goldstein, da E. Wiedemann e da Hertz.

E. Goldstein. *Sulla conducibilità elettrica nel vuoto.* — L'A. aveva già fatto altre volte notare che se i gas estremamente rarefatti funzionano da coibenti, ciò deve esser dovuto non alla resistenza che opponga il vuoto alla scarica (chè anzi la resistenza dei gas diminuisce colla rarefazione loro); ma soltanto ad una resistenza che si presenta alla superficie del catodo e che cresce rapidamente colla rarefazione.

Per verificare che la resistenza al catodo è minore quando è rivestito da un denso strato gasoso, e che la resistenza dei gas decresce colla rarefazione, il Goldstein fece delle esperienze con un tubo evacuato il più possibile, nel quale il catodo era formato da un bastoncino di cadmio; i vapori che esso emetteva quando veniva riscaldato con una corrente elettrica, eran fatti condensare in vicinanza del catodo stesso; così il catodo era immerso in un'atmosfera abbastanza densa, mentre l'anodo era in uno spazio estremamente rarefatto. In questo modo avveniva la scarica, che non si otteneva quando anche attorno al catodo si aveva rarefazione estrema.

Ritenendo che nella scarica elettrica le particelle gasose abbiano una parte secondaria, e che tutto dipenda dalle condizioni in cui si trova il catodo, il Goldstein prese anche a studiare i

fenomeni che si osservano arroventando dei catodi non volatilizzabili, e adoperando i filamenti delle lampade elettriche Swan, stabilì che quei filamenti incandescenti sono catodi che presentano alla scarica una resistenza piccolissima, cioè una frazione minima di quella che in condizioni analoghe presenterebbero alla temperatura ordinaria; talchè con i catodi incandescenti si può ottenere, in uno spazio evacuato il più possibile, non solo la scarica di un rocchetto, ma anche quella di batterie galvaniche di tensione relativamente piccola. Così il Goldstein ottenne la scarica con una batteria di 175 elementi Planté. Lo stesso si ottiene con catodi di platino; ma questi si fondono troppo facilmente, ed è difficile che servano a più di una scarica.

L'aspetto della scarica ottenuta con i catodi incandescenti è precisamente quello che si ha coi catodi freddi. L'incandescenza dell'anodo non facilita affatto la produzione della scarica.

W. Siemens. *Contribuzioni alla teoria del magnetismo.* — Partendo dal concetto di Faraday che tanto nei corpi magnetici, quanto nello spazio che li circonda, l'azione magnetica si trasmetta da un elemento di volume all'altro, ai fenomeni magnetici si dovrebber potere applicare, con opportune modificazioni, le leggi sulla conduzione del calore e dell'elettricità; talchè anche l'intensità della magnetizzazione dovrebbe resultare espressa dal rapporto fra la somma di tutte le forze magnetizzanti e la somma di tutte le resistenze, e si dovrebbe pure avere che in ogni sezione piana che taglia tutte le linee di forza, la somma di tutti i momenti magnetici di tutte le molecole intersecate fosse uguale a zero.

Estendendo poi a tutti i corpi l'ipotesi di Ampère sulla costituzione dei magneti, è chiaro che se una sostanza particolare, p. es. il ferro, contiene un maggior numero di correnti molecolari per unità di volume in confronto di altre sostanze, il lavoro che una corrente elettrica deve eseguire per magnetizzare un anello circolare di ferro deve esser maggiore di quello che occorrerebbe per orientare i solenoidi elementari in un anello identico, ma fatto con un'altra sostanza. Ma poichè nel ferro sarà maggiore l'influenza che esercitano fra loro gli elementi continui, a causa della loro maggior vicinanza, ne segue che anche la somma dei momenti magnetici dovuti ad un anello di ferro sarà maggiore di quella che si avrebbe per un anello di uguali dimensioni, ma fatto con una sostanza meno magnetica. Ciò potrebbe anche esprimersi dicendo che il ferro e le altre sostanze magnetiche oppongono alla polarizzazione una resistenza minore delle sostanze non magnetiche. Un anello chiuso non può avere azione all'esterno, perchè tutte le linee di

forza si chiudono in esso; ma le condizioni sono diverse se l'anello è aperto. Poichè la resistenza offerta dal ferro alla polarizzazione è circa $^1/_{500}$ di quella che offre l'aria, il magnetismo totale vi sarà minore, e le linee di forza che riuniscono le estremità dell'anello devono occupare lo spazio interposto con densità molto diverse, e devon dare origine ai fenomeni del così detto magnetismo libero.

Quindi la teoria di Ampère andrebbe estesa, col supporre che non solo le sostanze magnetiche, ma anche tutti gli altri corpi ed il vuoto siano ripieni di correnti circolari infinitesime, e che le sostanze magnetiche differiscano dalle altre soltanto perchè esse contengano, per unità di volume, un maggior numero di tali correnti elementari.

Guidato da questi concetti il Siemens ricercò sperimentalmente se il magnetismo prodotto da una forza magnetizzante in una sbarra di ferro, tanto diritta che piegata a ferro di cavallo, è realmente in ragione inversa della resistenza totale del circuito magnetico. Egli adoperò per queste ricerche varie elettrocalamite, sia diritte che a ferro di cavallo, provviste di due circuiti fra loro indipendenti: uno serviva per la corrente magnetizzante, l'altro per misurare l'induzione dovuta al magnetismo eccitato. Onde eliminare le perturbazioni dovute al magnetismo residuo, era rapidamente invertita la corrente nel circuito magnetizzante. Fece delle esperienze con l'elettrocalamita a ferro di cavallo, dapprima chiusa con un'ancora di ferro dolce, poi lasciata aperta; variò la lunghezza delle branche, e pose l'ancora a diverse distanze dalle branche stesse, formando cioè un circuito in parte col ferro e in parte con aria, o con altri gas; colle elettrocalamite diritte adoprò nuclei di ferro dolce e di acciaio, di lunghezze variabili; e da tutte queste esperienze resultò che la *resistenza magnetica* del ferro e delle altre sostanze magnetiche varia con l'intensità della magnetizzazione, ciò che non è accertato per le sostanze non magnetiche; anzi avendo trovato che il massimo della magnetizzazione non si raggiunge per l'aria più presto che per il ferro, sembrerebbe che l'intensità del campo magnetico fosse limitata soltanto dal massimo del magnetismo nel ferro, e che la conduttività magnetica delle sostanze non magnetiche fosse costante. La resistenza magnetica dell'aria fu trovata da 480 a 500 volte quella del ferro, e lo stesso fu per altri gas e pel vuoto. Finalmente il Siemens stabilì che in una sbarra di ferro circondata da correnti elettriche si può produrre solamente tanto magnetismo, quanta è la somma dei momenti magnetici che possono venir destati da quelle correnti sia nell'interno della sbarra, che nello spazio che la circonda.

H. Hertz. *Sulle dimensioni del polo magnetico nei vari sistemi di misura.* — È noto come alcuni fisici abbiano asserito che il sistema elettrostatico di misure presenti delle difficoltà che non si riscontrano nel sistema elettromagnetico. Infatti nel sistema elettromagnetico, in cui la quantità fondamentale è $[m] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$, le dimensioni dell'unità di quantità elettrica sono $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$ tanto secondo la relazione fondamentale del Maxwell che secondo quella del Clausius. Nel sistema elettrostatico invece, in cui si parte dalla quantità $[e] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$, le dimensioni dell' unità di polo magnetico sono $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$ secondo Maxwell, e $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2}$ secondo Clausius. L'A. fa vedere peraltro che se invece di partire dal concetto di corrente elettrica si parte da quello di *corrente magnetica*, quale egli la definì in un suo precedente lavoro (v. *N. Cimento* XVII, p. 151), le relazioni per le dimensioni del polo magnetico sono concordanti nel sistema elettrostatico, e discordanti in quello elettromagnetico. Teoricamente sarebbe preferibile il sistema elettrostatico nella forma che si deduce dalle relazioni fondamentali stabilite dal Clausius, cioè $[m] = [e] L T^{-1}$; perchè se si considerano i fenomeni magnetici come prodotti da elettricità in moto, esso esprime un legame fisico e insieme una relazione matematica. Tuttavia l'A. consiglia di seguire l'Helmholtz, e di scegliere il *sistema di Gauss*, nel quale l'unità di elettricità e l'unità di polo magnetico sono definiti separatamente nello stesso modo, cioè $[e] = [m] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$, e nel quale si introducono dei fattori, che hanno delle dimensioni, nelle relazioni che legano grandezze elettriche a grandezze magnetiche.

E. Ketteler. *Le costanti ottiche dei mezzi magnetici.* — In seguito alle esperienze del Kundt sulla rotazione elettromagnetica del piano di polarizzazione della luce, riferite già in questo Giornale (XVII. pag. 163) l'A. richiama l'attenzione sulla teoria che espose in altri lavori (Wied. *Ann.* 15 e 18) e nella quale era considerato il legame fra la rotazione del piano di polarizzazione, la depolarizzazione delle onde, e gli indici di refrazione e di estinzione delle due onde circolari destrorse e sinistrorse. Poichè il Kundt non considerò la depolarizzazione, il Ketteler espone brevemente la teoria di tali fenomeni, che può servire di guida nelle ricerche sperimentali.

E. von Fleischl. *La doppia refrazione della luce nei fluidi.* — Dalla Casa Steinheil di Monaco l'A. fece costruire una cassetta parallelepipeda di vetro, divisa, per mezzo di lastre di vetro a facce parallele, in 22 prismi cavi, di cui 20 avevano l'an-

golo refrangente di 120°, e 2 di 60°. La costruzione fu così accurata, che mediante un cannocchiale si potevano distinguere nettissimi dei tratti finissimi, tracciati col diamante su un vetrino, attraverso i 22 prismi vuoti. Ma se undici di quei prismi si riempivano con un liquido destrorso e gli altri undici con un liquido sinistrorso, alternando un destrorso con un sinistrorso, e i liquidi si sceglievano in modo che avessero lo stesso indice di refrazione, si veniva a comporre un prisma di Fresnel, e se i liquidi stessi fossero stati birefrangenti, un punto luminoso veduto attraverso ad essi avrebbe dovuto apparire doppio. Ciò accadde effettivamente con diversi liquidi, e con le soluzioni di zucchero ordinario, destrorso e sinistrorso l'A. ebbe indizio di doppia refrazione; talchè da queste esperienze, combinate con quelle già note di Fresnel sul quarzo ne conclude: che vi sono dei liquidi birefrangenti; che i due raggi in cui si divide un raggio polarizzato rettilineamente che attraversa quei liquidi, sono polarizzati circolarmente, e uno di senso opposto all' altro; che dalla diversa velocità dei due raggi ne segue una differenza di fase proporzionale allo spazio percorso nel liquido, la quale è la sola causa della polarizzazione circolare di quei liquidi; che i liquidi birefrangenti non hanno asse ottico, ma che le onde luminose in essi consistono in due superficie sferiche concentriche.

W. Voigt. *Sulla determinazione dell' indice di refrazione dei mezzi assorbenti.* — Osserva dapprima l'A. che nella definizione dell'indice di refrazione devesi tener conto anche dell'ampiezza delle onde, che devono essere uguali nei due mezzi fra i quali avviene la refrazione; e che se questo accade pei mezzi perfettamente trasparenti, non accade per quelli assorbenti. Riferendosi quindi ad un lavoro del Sieben, (v. sunti *N. Cim.* XVII, pag. 167) nel quale questi cercò di dimostrare che anche pei mezzi assorbenti si posson determinar gli indici di refrazione sia col metodo della riflessione totale, sia con quello del prisma, l'A. osserva che dall' ottenere resultati concordanti coi due metodi pei raggi poco assorbiti, non se ne può inferir nulla per quelli che subiscono un forte assorbimento, tanto più che il metodo della riflessione totale non è affatto al coperto da obiezioni.

L'A. espone poi la teoria del metodo del prisma per i mezzi assorbenti, e mostra come questo metodo sia preferibile a quello della riflessione totale.

W. Voigt. *Sulla teoria della riflessione e della refrazione alla superficie di separazione di mezzi trasparenti cristallini* — Questa memoria è il complemento di un precedente lavoro (*N. Cim.* XVII pag. 158) nel quale l'A. espose le leggi delle azioni mutue fra le molecole ponderabili e l'etere nei cristalli.

2. — L. Arons. *Determinazione della costante di Verdet in misura assoluta.* — Il valore della costante indicata, che è il rapporto della rotazione elettromagnetica, valutata in arco, prodotta da una colonna d'una sostanza trasparente, alla differenza di potenziale alle sue due estremità, e che può servire alla misura assoluta dell'intensità delle correnti, fu già determinato da Gordon e da Becquerel; ma i valori ottenuti da quei due Fisici differiscono del 9 per °/₀ fra loro, talchè l'A. stimò opportuno ripetere tale determinazione. Dalle esperienze fatte con tutte le maggiori precauzioni possibili, ottenne, per l'acqua distillata, a 23°/₀ e per la luce del sodio, il valore $0,3767 \times 10^{-5} \mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{g}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{sec}'$.

Questo valore non può, secondo l'A. esser più del 0,5 per °/₀ diverso dal vero; ciò che può bastare per la misura pratica delle correnti.

F. Richarz. *La formazione dell'ozono, del biossido d'idrogeno e dell'acido persolforico nell'elettrolisi dell'acido solforico diluito.* — Essendo necessario, alla produzione dell'ozono, notevole densità di corrente all'anodo e bassa temperatura, l'A. adoprava per anodo un filo finissimo di platino; al catodo sarebbe stato bene dare gran superficie; ma per tenere inalterata la posizione relativa dei due elettrodi, bisognò ricorrere a un filo anche pel catodo. Operando l'elettrolisi dell'H_2SO_4, fu dall'A. notato che la quantità dell'acido persolforico che si otteneva in tempi uguali e successivi non era costante, e per ottener questa costanza l'A. trovò che bisognava arroventare l'anodo alla fine di ogni determinazione. Questa necessità è dovuta alla produzione dell'ossigeno all'anodo.

Per la quantità di perossido messo in libertà in un tempo t, cioè per la differenza fra la quantità M prodotta all'anodo e quella ridotta al catodo, l'A. stabilì la formula

$$M = A\,(1 - e^{-nt}),$$

ove A ed n sono costanti.

Quanto all'influenza della densità della corrente, trovasi che per piccole densità la differenza fra la quantità del miscuglio esplosivo calcolata dalla deviazione della bussola delle tangenti, e la quantità del gas sviluppato, aumentata dell'ossigeno disponibile dell'acido persolforico, è determinata soltanto dall'assorbimento, e per grandi densità in parte anche dalla riduzione dell'acido persolforico. Lo stesso vale per l'influenza della concentrazione dell'acido.

L'A. si riserva di studiare l'influenza che ha su quelle formazioni la forza elettromotrice di polarizzazione.

H. WILD. *Risposta ad alcune osservazioni del sig. Kohlrausch.* — Sono alcune rettificazioni di malintesi corsi fra i due fisici a proposito delle esperienze fatte per la determinazione dell'ohm.

Lord RAYLEIGH. *Sul metodo dello smorzamento nella determinazione dell' ohm.* — Si accenna ad alcune inesattezze che occorrono nella determinazione dell' ohm col metodo dello smorzamento, dovute all' identificazione di un magnete ad un solenoide, e alla presenza di ferro nel filo del moltiplicatore.

O. EHRHARDT. *Sulla determinazione del calorico specifico e del calorico di fusione ad alte temperature.* — Con un apparecchio appositamente costruito, e assai complicato, l'A. fece queste determinazioni a temperature fra 600° e quella ambiente. I resultati ottenuti lo persuasero dell' applicabilità dell' apparecchio col quale si può avere un' approssimazione non inferiore all' 1-2 per 100. Le determinazioni da esso fatte finora sono le seguenti:

	Calorico specifico medio		Punto	Calorico
	prima della fus.	dopo la fusione	di fusione	di fusione
Cloruro d' argento	0,0980	—	circa 490	—
» di piombo	0,0710	0,1035	485	20,90
Bromuro di »	0,0534	—	490	12,34
Ioduro di »	0,0430	0,0645	375	11,50

ma si riserva di farne molte altre, e di riscontrare se è esatta la relazione indicata da Person fra i calorici specifici e quelli di fusione.

H. KNOBLAUCH. *Due nuovi metodi per trovare l' angolo di polarizzazione dei metalli.* — Uno dei metodi consiste nel far cadere un raggio orizzontale di luce solare, polarizzata con un Nicol, su uno specchio piano metallico girevole attorno ad un asse verticale, nel fare attraversare ai raggi riflessi un secondo Nicol, e nel riceverli poi su una pila termoelettrica.

Il secondo metodo consiste nell' osservare che le strie nere che si hanno col compensatore di Babinet, quando i due prismi fanno fra loro un angolo di 45°, sono spostate di $^1/_4$ della loro distanza se fra i due prismi si fa ruotare, attorno ad un asse verticale, uno specchio piano metallico da 0° fino all' angolo di polarizzazione del metallo adoperato.

A. BLÜMCKE. *Sulla determinazione del calorico specifico dell' uranio.* — A proposito della determinazione riferita in un precedente lavoro (v. sunti *N. Cim.* XVII, p. 160), l'A. fa notare

che dalle esperienze di C. Zimmermann (*Chem. Ber.* 15, 1882) resulterebbe, pel calorico specifico *c* dell'uranio:

alla temperatura di 98.95 $c = 0,02808$
» 98,75 $c = 0,02815$.

W. Möller. ***Ricerche sperimentali sulla legge dell' emanazione luminosa dei corpi incandescenti.*** — Le misure sono state fatte con un fotometro di Wild, opportunamente semplicizzato dall'A. onde poterlo adoperare anche per piccole intensità. Con esso l'A. dimostrò empiricamente la legge del coseno, ed eseguì delle misure sull'intensità della luce emessa da diverse lampade ad incandescenza.

M. Réthy. *Osservazioni sulla « critica della teoria della luce diffratta » di J. Fröhlich.* — L'A. osserva che alcune deduzioni del Fröhlich (v. *N. Cim.* XVI, p, 153) sono inesatte, e che le formule che egli dette per la diffrazione della luce non devon considerarsi come formule empiriche, ma che sono invece rigorose.

E. Lommel. *Osservazioni sulla fluorescenza.* — Sono alcune indicazioni sulla fluorescenza rossa del vetro di didimio e della soluzione di escorcina.

C. Rammelsberg. *Sugli acetati doppi di uranio.* — È un lavoro che interessa specialmente la chimica.

H. J. Oosting. *Nota sulle figure di Kundt.* — Oltre le indicazioni date da Neesen (v. sunti *N. Cim.* XVIII, p. 79) per ottenere le figure di Kundt coi suoni bassi, l'A. indica il metodo seguente. La parte aperta della cassa di risonanza di un diapason si chiude con un rettangolo di cartone che ha un foro nel centro; in questo foro s'introduce il solito tubo di vetro, lungo 1^m, e del diametro di 35^{mm}, nel quale si producono le figure di Kundt.

3. — R. W. Bunsen. *Sull' assorbimento capillare dei gas.* — I lettori di questo Giornale sanno a quali controversie abbian dato luogo le prime esperienze del Bunsen su questo soggetto. Una delle cause che al Bunsen sembrano poter influire sul fenomeno dell'assorbimento è il rivestimento di vapor acqueo che presentano i vetri anche dopo scaldati ad altissime temperature. In questa memoria egli riferisce le esperienze che fece per determinare lo spessore di questo rivestimento.

Il metodo seguito consisteva nel far passare per più settimane di seguito sopra i soliti fili di vetro una corrente d'aria secca e caldissima, mantenuta a temperatura costante con un termostato appositamente immaginato. Calcolando la superficie del fascio di fili dal suo peso, e determinando il peso del vapor acqueo asportato da quella corrente d'aria in tempi successivi, il Bunsen trovò che l'evaporazione degli strati capillari di vapor acqueo si fa as-

sai lentamente, e decresce gradatamente, per cessare poi del tutto al crescere della temperatura. Il punto in cui cessa l'evaporazione dipende dalla temperatura costante della corrente d'aria. Se, dopo che è stato raggiunto una volta questo punto, la temperatura cresce di nuovo, la evaporazione ricomincia daccapo, per ridursi di nuovo a zero, e così via, fino alla completa asportazione del vapor acqueo, che avviene dopo molto tempo e ad alte temperature.

Nel momento in cui l'evaporazione cessa alla temperatura t, la tensione del vapore alla superficie dello strato capillare deve essere uguale a zero, e perciò ad esso deve fare equilibrio l'attrazione capillare emanante dal vetro. Le tensioni del vapore alle temperature t ora dette devono quindi essere la misura dell'azione capillare che dalla superficie del vetro viene esercitata sul vapor acqueo.

Lo spessore dello strato di vapore che riveste i fili è calcolato nel modo seguente.

Sia R, in millim., il raggio medio dei fili di vetro, e H la loro lunghezza complessiva; sia d il diametro, e g il volume dello strato di vapore in millim. c. a 4° c.; il volume totale del vetro e dello strato di vapore sarà:

$$(R + d)^2 \pi H;$$

sottraendone il volume $R^2 \pi H$ del vetro, si ha

$$g = \pi (2R d + d^2) . H,$$

e trascurando d^2:

$$d = \frac{g}{2 \pi R H}.$$

Questo valore di d dipende per altro dall'aumento di volume che alle diverse temperature acquista l'unità di volume dell'acqua; aumento, che per temperature non superiori a 215° c. si può dedurre dalle esperienze di Hirn. Dalle ricerche del Bunsen risulterebbe:

t	d	d_1	p
23° c.	0,000 01052	0,000 01055	0,027
107	670	703	1,278
215	547	645	20,791
329	363	—	
415	132	—	
468	042	—	
503	000	—	

dove d_1 è lo spessore dello strato di vapor acqueo alla temperatura t, e p è la corrispondente tensione in atmosfere.

Da questi resultati si potrebbe concludere che in prossimità della superficie del vetro la pressione sia molto grande, valutabile probabilmente in centinaia di atmosfere. Questo spiegherebbe tutti i fenomeni precedentemente studiati dal Bunsen, e che il Kayser ascriveva a imperfezione degli apparecchi. Infatti il vapor acqueo, sotto così forti pressioni, potrebbe assorbire una quantità grandissima di CO_2; tale assorbimento si farebbe lentamente; crescerebbe colla temperatura, dacchè colla temperatura cresce la pressione capillare; e la variazione di pochi centimetri di mercurio, su tale enorme pressione, non può avere influenza alcuna.

G. QUINCKE. *Ricerche elettriche.* — L'A. espone più diffusamente ciò che pubblicò già nel *Phil. Mag.* del 1884. (v. sunti *N. Cim.* XVI, pag. 257).

O. LUMMER. *Sulla teoria e sulla forma di nuove curve d' interferenza.* — L'A. descrive dei fenomeni d'interferenza che si producono per le riflessioni successive su due lastre di vetro, a faccie piane e parallele, inclinate fra loro; ma senza l'aiuto delle figure delle quali l'A. l'ha corredato, è impossibile dare un cenno di questo lavoro.

C. CRISTIANSEN. *Ricerche sulle proprietà ottiche dei corpi finamente divisi.* — Premesse alcune notizie sulle proprietà ottiche dell'idrofane e di corpi analoghi, sia che si trovino allo stato naturale, sia che vengano imbevute d'acqua, l'A. stabilisce fra gl'indici di refrazione di una sostanza finamente divisa, di un liquido, e del miscuglio fra liquido e polvere, la relazione:

$$(v_1 + v_2)\,N = v_1 n_1 + v_2 n_2,$$

essendo v_1 e v_2 i volumi della polvere e del liquido, n_1 e n_2 gli indici corrispondenti di refrazione, e N l'indice del miscuglio. Cambiando la composizione del liquido si ottengono delle relazioni analoghe, dalle quali si può dedurre il valore di n_1. Le esperienze fatte in proposito confermarono la validità di questa formula per la determinazione dell'indice di refrazione dei corpi finamente divisi.

W. MÖLLER. *Sul fotometro di Wild.* — Sono indicazioni sulle modificazioni che l'A. ha introdotte nel fotometro per farlo servire alle sue ricerche (v. sopra pag. 175) e per renderlo di uso più pratico.

E. ed L. NATANSON. *Sulla dissociazione del vapore dell'acido iponitroso.* — Gli Autori hanno determinato il rapporto χ fra i due calorici specifici del vapore di acido iponitroso, che dipende dalla costituzione della sua molecola. Tenendo conto dei principi

della termodinamica, a quello scopo si servono della formola dedotta dal metodo di Kundt, che riducono alla forma

$$\chi = 1{,}4053 \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(d-\delta_1)(2\delta_2 - d)}{(2\delta_2 - d)\delta_1 + 4\delta_2(d-\delta_1)}}$$

ove l, d, t sono la lunghezza d'onda, la densità e la temperatura del gas di cui si tratta, l_1, d_1, t_1, sono le stesse quantità per l'aria, e δ_1 e δ_2 son due costanti.

La formola precedente è stata ottenuta nell'ipotesi che sia nota la relazione fra pressione e volume, o fra pressione e densità, a temperatura costante; ed infatti gli A. trovano che essendo A una costante, si ha

$$p = A \frac{d - \delta_1}{(2\delta_2 - d)^2}.$$

Non possiamo seguire gli A. nella descrizione dei loro apparecchi e dei metodi di osservazione; e ci limiteremo ad accennare che il valore di χ è stato trovato decrescente colla densità del vapore di N_2O_4, al contrario di ciò che è stato trovato da altri sperimentatori per CO_2, N_2O, NH_3 e C_2H_4; e che il suo valore più piccolo 1,17 si avvicina a quello trovato pei gas la cui molecola è costituita da 5 da 6 o da più atomi; mentre il valor massimo 1,27 si avvicina a quello dei gas a molecola triatomica. Da ciò gli A. deducono che le variazioni di densità che si osservano nei vapori nitrosi in seguito alle variazioni della loro pressione son dovute ad una dissociazione dell'N_2O_4 in NO_2, e non già a divergenze dalla legge di Boyle.

M. Thiesen. *Ricerche sull'equazione caratteristica dei corpi.* — Di questo lavoro, d'indole essenzialmente matematica, non è possibile dare un breve cenno.

L. Pfaundler. *Sull'azione che sotto l'influenza della luce esercita sul vetro la CO_2 fortemente compressa.* — Volendo mostrare in lezione il contegno della CO_2 in vicinanza del punto critico, l'A. illuminava il tubo, ove comprimeva quel gas, con una lampada Drummond, e osservò che il vetro diventava, dopo poco tempo, spulito, accennando a una notevole azione chimica subìta durante l'illuminazione. Comunica questa osservazione in seguito alla controversia fra Bunsen e Kayser a proposito dell'assorbimento della CO^2 per parte del vetro levigato.

W. Voigt. *Replica all'osservazione del sig. Wüllner, relativa alle esperienze di Jamin sulla riflessione metallica.* — L'A. osserva che in qualunque modo si voglia intendere l'espres-

sione usata da Jamin (v. *N. Cim.* p. 79), la teoria che egli espose sulla riflessione metallica non subisce alcuna modificazione. Tuttavia esprime il desiderio che il signor Jamin voglia pronunciarsi decisamente in proposito.

N. 4. — F. Melde. *Ricerche sperimentali acustiche.* — Richiamati i diversi metodi già usati per mantenere in vibrazione un filo flessibile, il Melde ne propone alcuni altri, e fa qualche critica a quello indicato da Elsass (v. sunti *N. Cim.* XVII, pagina 161), dacchè è difficile assai mantenere costante la nota resa dalla sirena.

G. Tamman. *Sulla tensione dei vapori delle soluzioni saline.* — Wüllner aveva dedotto dalle proprie esperienze che la diminuzione prodotta nella forza elastica del vapor d'acqua dai sali che l'acqua tien disciolti, sono, per una stessa temperatura, direttamente proporzionali alla quantità del sale disciolto. L'A. ha fatto a questo proposito numerose esperienze, che riferisce in molte tabelle. Da esse resulta che la legge del Wüllner può ritenersi vera solamente per i solfati di Na, NH_4, Mg, pel bromuro di ammonio e pel cloruro di bario, quando peraltro le concentrazioni delle soluzioni non sieno molto differenti fra loro. Per molti sali gli abbassamenti della tensione crescono colla proporzione del sale; pel nitrato di K e di Na e pel cloruro di K invece diminuiscono; per altri ancora dapprima crescono, poi diminuiscono.

Rammenta le relazioni indicate da Rüdorff, De Coppet, Raoult e Kolácec fra l'abbassamento nella tensione del vapore e l'abbassamento nel punto di congelazione, o l'inalzamento di quello d'ebollizione; ma riscontrato che non sono d'accordo con le sue esperienze, stabilisce che l'abbassamento di tensione è direttamente proporzionale al prodotto del volume relativo e della quantità di sale disciolto. Ciò vale almeno per i sali non idrati; poichè i sali che contengono acqua di cristallizzazione hanno una tensione di vapore tutta speciale.

W. von Bezold. *Sulle figure di corrente nei fluidi.* — Continuando lo studio accennato in una precedente nota (v. sopra pag. 166), l'A. ricorda i lavori di altri fisici che si sono incidentemente occupati di questo soggetto; ma sembra che non abbia cognizione di una memoria di G. H. Darvin (*Proc. Roy. Soc.* 36, 1883), il quale usò questo metodo molto accuratamente nello studio dei moti vorticosi cui son dovute le increspature che si producono su un fondo sabbioso ricoperto da un liquido che compie oscillazioni periodiche. Con l'aiuto di molte e belle figure l'A. illustra i fenomeni che si osservano per l'influenza di piccole differenze di temperatura in un recipiente pieno d'acqua,

per la diffusione di due liquidi, per l'elasticità del velo superficiale, per l'elasticità susseguente, e per la tensione superficiale dei liquidi.

E. KITTLER. *Sulla misura dell' intensità delle correnti.* — Il metodo indicato per queste misure è quello che fu seguito nelle esperienze fatte colla dinamo e colle lampade elettriche alle esposizioni di Monaco, di Vienna e di Filadelfia. Il metodo consiste nel mandare nel galvanometro una corrente derivata, mantenendo costante la resistenza del tratto di derivazione, e variandola nel circuito del galvanometro fino ad ottenere una conveniente deviazione. La graduazione in *ampère* è fatta coll'uso del voltametro a solfato di rame, che l'Autore trova praticamente opportuno.

G. QUINCKE. *Ricerche elettriche.* — Continuando l'esposizione delle sue ricerche (v. *N. Cim.* XVI, pag. 257) l'A. riferisce le esperienze fatte sulla rotazione elettromagnetica del piano di polarizzazione della luce. Dapprima egli determinò il poter rotatorio elettromagnetico ρ di alcune sostanze, in misura assoluta. Pel solfuro di carbonio a 21°,06 c. trovò $\rho = 4{,}409'$ e a 0°, $\rho_0 = 4{,}535'$; valori che coincidono assai con quelli trovati da Becquerel, Rayleigh e Gordon.

Indica dipoi un metodo per determinare la forza magnetica H_1 di un campo magnetico costante, per una sostanza qualunque dielettrica, mediante la formula

$$H_1 = \frac{2\,\phi_0}{100\,l_0\,\rho_0},$$

ove ϕ_0 è la rotazione per la sostanza adoprata, ρ_0 quella per il solfuro di carbonio, l_0 lo spessore della sostanza.

In una delle tabelle che sono contenute in questa memoria il Quincke dà il potere specifico elettromagnetico pei cloruri di ferro e di manganese in soluzioni acquose o alcooliche di diverse concentrazioni. Dai numeri che riferisce si rileva che tal potere elettromagnetico specifico non è costante per lo stesso sale, ma che diminuisce colla concentrazione, mentre il magnetismo atomico (v. *N. Cim.* l. c.) dello stesso sale accenna a variazioni piccolissime colla concentrazione. Da ciò l'A. conclude che le pressioni magnetiche e il poter rotatorio elettromagnetico di una stessa sostanza non hanno fra loro alcuna relazione.

A. GOCKEL. *Sulle relazioni dell' effetto Peltier coll' effetto utile delle pile galvaniche.* — È noto che vi sono delle pile nelle quali non tutto il calore dovuto alle azioni chimiche si trasforma in energia elettrica, e altre in cui questa energia supera quella che

corrisponderebbe al calore chimico. Le prime si devono riscaldare quando sono percorse dalla corrente che producono: le altre si devono raffreddare. L'A. ha cercato di determinare secondo qual legge avviene questo riscaldamento o questo raffreddamento e di vedere se questo calore secondario (come vien comunemente chiamato), possa ritenersi dovuto all'effetto Peltier. Per non incorrere in serie difficoltà, tale studio fu limitato a quelle pile in cui i processi chimici consistono nella soluzione di un metallo a un elettrodo e nella formazione del medesimo metallo all'altro elettrodo. Per eseguire le sue ricerche occorreva all'A. conoscere: il calore svolto nell'elemento in seguito ai processi chimici; la parte di esso trasformata in energia elettrica; il calore svolto o assorbito al contatto delle sostanze eterogenee che formano la pila, pel passaggio dell'unità di elettricità. Le prime due ricerche sono state già fatte da altri; talchè restava soltanto la terza e questa fu fatta quasi contemporaneamente da Czapsky (v. sunti *N. Cim.* XV, pag. 79) e dall'A.; ma i metodi furono affatto diversi. Il Gockel misurava l'effetto Peltier dalle variazioni della forza elettromotrice dell'elemento studiato, prodotte da variazioni di temperatura a cui si assoggettava. I resultati sono i seguenti: relativamente al segno, l'effetto Peltier corrisponde al calore secondario delle pile galvaniche; ma le misure quantitative non corrispondono alle deduzioni teoriche. Secondo l'A., ciò non si può ascrivere, come fa Czapsky, alla incompleta cognizione del calore svolto nei processi chimici.

H. Schultze. *Sull' azione reciproca di due distribuzioni magnetiche fra loro ortogonali.* — Avvolgendo su un cilindro cavo di ferro dolce due spirali di filo di rame isolato, una con le spire parallele all'asse, l'altra nel modo ordinario, W. Siemens trovò che la magnetizzazione circolare determina una diminuzione del momento magnetico nella direzione della lunghezza. L'A. ha ripetuto queste esperienze con diverse specie di ferro e d'acciaio; ed ha trovato esatti i risultati del Siemens, notando che quanto maggiore è la magnetizzazione assiale, tanto minore è l'influsso di quella circolare, e che l'indicata diminuzione cresce al diminuire dello spessore del tubo. Col calcolo poi dimostra che dalla teoria della magnetizzazione si può dedurre che nel caso di due magnetizzazioni ortogonali fra loro, per forze abbastanza deboli si può avere anche un aumento del momento magnetico assiale.

A. König e F. Richarz. *Nuovo metodo per determinare l' accelerazione della gravità.* — È noto che v. Jolly, con una bilancia munita da una parte di due piatti, distanti fra loro di 21 m. trovò una differenza nel peso di una massa *m* che veniva posta una volta sul piatto superiore, e un' altra su quello inferiore; e

che trovò un aumento nel peso stesso, quando sotto il piatto inferiore, su cui era posta quella massa, veniva collocata una sfera di piombo di 5775 Cg. Da quella esperienza poteva dedursi il valore di *g*. Gli A. si sono proposti di ripetere queste ricerche in modo da eliminare l'azione perturbatrice delle correnti d'aria sul filo così lungo che riuniva i due piatti, e a tale scopo hanno immaginato di far costruire, con circa 3000 pezzi, un parallelepipedo di piombo del peso di 100 tonnellate, colla base superiore di 2 mq. circa, e provvisto di due fori verticali. Una bilancia da costruirsi appositamente sarà posta su tal blocco, e porterà due piatti per parte: uno al disopra e l'altro al disotto del blocco, riuniti da aste metalliche passanti pei fori anzidetti. Una stessa massa *m* verrà posta una volta sul piatto superiore, l'altra sul piatto inferiore, sempre da una stessa parte, e verrà equilibrata successivamente con pesi posti sul piatto inferiore e su quello superiore respettivamente. Dalle dimensioni del blocco e dalle pesate da eseguirsi, gli A. si ripromettono un'esattezza almeno 8 volte maggiore di quella ottenuta da Jolly, nella determinazione del valore di *g*. La costruzione del blocco avrà luogo nella fonderia della cittadella di Spandau, messa a disposizione degli A. dal Ministero della guerra di Prussia.

L. Arons. *Strie d'interferenza nello spettro.* — Sono state osservate quelle strie in uno spettrometro di Mayerstein, e secondo l'A. sono dovute allo strato interposto fra le due parti che compongono gli obiettivi acromatici sia del collimatore che del cannocchiale. Infatti esse spariscono se le due parti delle lenti si riuniscono con balsamo del Canadà, o se fra esse s'interpone dell'aria.

R. Weber. *La sirena elettrica.* — Mediante una ruota dentata messa in moto da un motore elettrico, e contro la quale si appoggia una molla metallica, si può interrompere il circuito di una pila elettrica un numero di volte al secondo, che si può variare e determinare. Se nel circuito della pila si trova un telefono, quando la ruota è in movimento si ha un suono, la cui origine è nelle oscillazioni della lastra telefonica. Se in uno stesso circuito telefonico si includono più ruote dentate, con numero diverso di denti, si possono ottenere contemporaneamente più suoni, dei quali si fa la composizione. A questo scopo tutte le ruote dentate son portate da un medesimo asse, col quale sono in comunicazione metallica; ognuna delle molle che si appoggiano sulle ruote è unito al polo positivo, p. es. di una batteria di 4 o 5 elementi Daniell, e tutti i poli negativi delle varie batterie son riuniti fra loro da un filo che va poi ad uno dei capi del telefono; l'altro capo del telefono comunica coll'asse delle ruote. Variando il rapporto fra l'ampiezza dei pezzi conduttori e di quelli coibenti del

reotomo, si può variare il modo d'oscillazione della lastra telefonica, e quindi il metallo dei suoni. Con questa sirena si può costatare che i suoni di combinazione scoperti teoricamente da Helmholtz hanno un'esistenza reale, e non sono dovuti a una proprietà speciale dell'orecchio, come alcuni ritenevano pel passato.

COLACICCHI e MARINI. *Micro-telefono.* — La *Società generale italiana di telefoni ed applicazioni elettriche* (Napoli, Via Medica n. 24) ha posto in vendita un Micro-telefono didattico, sistema Colacicchi e Marini, che può rendere utili servigi nell'insegnamento. La comunicazione fra le diverse parti dell'apparecchio e colla linea essendo tutte visibili, può esser facilmente mostrato qual'è l'andamento delle correnti, e qual'è il modo di funzionare di ciascuna parte. L'apparecchio può servire anche a dimostrare che tutti i microfoni e telefoni fin quì costruiti non sono che modificazioni del primo microfono Hughes e del primo telefono Bell, e che tutta la novità del principio, che serve di base a questo genere di corrispondenza, consiste nell'uso dei contatti a carbone e delle lamine vibranti.

Mercè un opportuno reotomo, l'apparecchio stesso può servire come piccolo rocchetto di Ruhmkorff.

I microfoni, che vanno uniti all'apparecchio messo in vendita dalla Società predetta, sono quelli Hughes, Blake, Ader e Pianta. Il prezzo varia da lire 160 a lire 210 (senza pile) a seconda del numero di microfoni che si richiede, e dell'eleganza che si desidera nella montatura.



STUDI SUL LAVORO CHIMICO INTERNO DELLA PILA:

DEL PROF. C. TOSCANI.

Ricerche intraprese nel 1858, i cui primi risultati furono comunicati all'Accademia dei Fisiocritici di Siena nel 1859, mi conducevano a stabilire una legge non per anco avvertita relativa al rapporto tra la quantità di zinco che nella pila si consuma utilmente sulla faccia interna, e la quantità che si consuma sull'esterno. Costretto allora ad abbandonare quello studio per difetto di mezzi sperimentali, lo ripresi nel corrente 1885 e pervenni ai resultati che qui sotto trascrivo e dai quali emergono luminosamente le due leggi che formulo in precedenza.

Leggi

I. Se entrambo le superfici dello zinco sono attive, il contingente che ciascuna porta nell'azione chimica generale utile, è in ragione inversa del quadrato della distanza delle dette superfici dal centro dell'elemento chimicamente inattivo (carbone, platino).

II. Qualunque sia il numero delle superficie di zinco metallicamente congiunte all'elemento inattivo o meno attivo, e qualunque e comunque varia sia la loro distanza da esso, ciascuna di dette superficie concorre all'azione generale in ragione inversa del quadrato della propria distanza dal centro dell'elemento inattivo, o quasi.

Esperienze che comprovano le enunciate leggi.

La prima esperienza venne eseguita con cilindri di zinco che avevano per raggio esterno $4^{cm},9$ e per raggio interno $3^{cm},05$ avevano cioè lo spessore di $1^{cm},85$ e che si ottennero gettando in apposite forme del zinco che aveva già subìta un'altra fusione, perchè meglio riuscisse spoglio di impurezze. Con vernice di catrame venne ricoperta la superficie interna di uno e la superficie esterna di un altro di quei cilindri, ed in un terzo zinco si lasciarono attive ambo le superfici. Amalgamati copiosamente quei tre zinchi e quindi pesati, si collegarono ad altrettanti carboni tolti da un medesimo blocco di carbone di storta e che avevano per diametro $1^{cm},2$. Montati così i tre zinchi all'uso Bunsen, s'immersero simultaneamente in un medesimo truogolo contenente l'acqua acidulata nella quale rimasero per un'ora intera.

La seguente tabella offre i dati e i resultati di quella prima esperienza.

Esperienza I.

Raggio delle superficie attive	$3^{cm},05$	$4^{cm},90$	3,05 4,90
Peso degli zinchi prima dell'azione	$3^{k},7290$	$3^{k},7796$	3,7379
Peso dopo l'azione	3,7137	3,7738	3,7166
Perdita di peso effettiva in grammi	15,3	5,8	21,30
Perdita calcolata	15,15	5,87	21,02

Amalgamati nuovamente i due primi zinchi, ripetei l'esperienza raddoppiando la durata dell'azione ed ottenni:

ESPERIENZA II.

	k	k
Peso degli zinchi prima dell'azione	3,7190	3,7787
Peso dopo due ore d'azione. . .	3,6961	3,7698
Perdita effettiva in grammi . .	22,9	8,9
Perdita calcolata.	22,93	8,82

Ritenendo che il rendere inattiva ora la superficie esterna ora l'interna dello zinco non poteva indurre cambiamento apprezzabile nella resistenza della coppia, volli tentare la verificazione della prima legge col lavoro chimico esterno. Perciò, fatti gettare quattro cilindri di zinco dello spessore di un centimetro circa, due vennero verniciati internamente, gli altri due esternamente, e quindi ne formai due sistemi che feci agire coi medesimi liquidi e coi medesimi carboni, sostituendo un sistema all'altro alternativamente, onde le variazioni d'attività dei liquidi influenzassero quei due sistemi il più egualmente possibile. Una montatura speciale rendeva spedita quella sostituzione. Mi valsi finalmente dell'ingegnoso voltametro Bertin per misurare l'idrogeno che nel tempo fisso, 5', si otteneva in ciascuna esperienza. Il seguente quadro riassume i dati e i resultati di questa terza prova.

ESPERIENZA III.

	cm	cm
Raggi delle superficie attive . . .	3,03	4,10
Idrogeno in centimetri cubi *m* 5' .	1,37	0,80
»	1,70	0,98
»	1,73	0,85
»	1,66	0,90
»	1,50	0,91
SOMMA	7,96	4,44
Media	1,59	0,89
Media calcolata	1,61,	0,88

A fine di applicare più comodamente il sistema della valutazione del peso perduto dagli zinchi a casi di differenze di raggio più notevoli, procurai che i singoli elementi fossero costituiti

da due cilindri concentrici di lastra di zinco dello spessore $0^{mm},4$ incastrati in legno foggiato a ciambella. Della parafina colata negli incastri ed altra versata nell'intercapedine dopochè le lastre erano assicurate alla ciambella in legno, stava ad impedire che l'acqua acidulata penetrasse in quell'intercapedine; così non erano attive che la superficie interna del cilindro minore e l'esterna del maggiore. Questa nuova foggia di coppie non diede in principio risultati così netti come i precedenti, ma ben tosto mi accorsi:

Che lo zinco cilindrico non si amalgamava sempre così uniformemente e così profondamente come quello di buon getto, per cui sotto un'azione anche non esageratamente prolungata esso presenta delle chiazze brune nelle quali si determinano delle correnti locali. L'altro sconcio si è che se montiamo simultaneamente diversi elementi di fresco amalgamati in modo apparentemente eguale, per alcuni l'azione chimica franca si palesa immediatamente, per altri ritarda anche di più minuti primi.

Avvertiti quei fatti, fu facile difendersi dai loro effetti nocivi.

I cilindri amalgamati, prima di pesarli, si tenevano per qualche minuto primo in acqua acidulata congiunti a rame o a carbone, quindi lavati e asciugati con carta bibula, si pesavano e si montavano per l'esperienza, procurando che in questa l'azione chimica non si protraesse molto al di là di 25'.

Delle molte esperienze eseguite e riuscite con elementi simili riportiamo soltanto alcune di quelle nelle quali la disposizione delle parti e le dimensioni offrono differenze un po' notevoli.

Esperienza IV.

Raggi delle superficie attive . . .	$3^{cm},0$	$9^{cm},0$
Perdita di peso effettivo	$8^{g},250$	$0^{g},930$
Perdita di peso calcolata	8,310	0,923

Abbandonato l'incomodo sistema di fissare le lastre di zinco su ciambelle di legno, adottai l'altro di parafinare quella faccia che volevo inattiva e così montai due coppie nel medesimo trogolo d' acqua acidulata. Una di esse si componeva di due lastre concentriche le cui supertici attive avevano per diametro $9^{cm},3$ e $6^{cm},0$. L' altra coppia portava una sola lastra della quale la faccia interna non parafinata aveva $15^{cm},25$ di diametro, tantochè nei due sistemi le superficie attive erano pressochè eguali.

La seguente tabella riproduce i dati e i resultati di quella esperienza.

ESPERIENZA V.

	1° Sistema		2° Sistema
	g	g	
Peso degli zinchi prima dell'azione	87,620	136,940	222,390
Peso dopo l'azione	85,640	156,120	219,600
Perdita effettiva	1,980	0,820	2.790
Perdita calcolata	1,975	0,822	2,788

Profittando di un'antica pila nella quale il carbone foggiato a recipiente tiene l'acqua acidulata e lo zinco, mentre l'acido nitrico riempie il vaso esterno in vetro, colai della parafina sul fondo del vaso di carbone e vi disposi due cilindri concentrici di zinco parafinati sulle superficie interne. In questa disposizione è il cilindro maggiore quello che ha la sua faccia attiva più vicina al carbone. Passo a trascrivere i resultati con questo sistema ottenuti in tre diverse prove con zinchi diversi.

ESPERIENZA VI.

Diametro degli zinchi		3,6 cm	1,3 cm
Distanza degli zinchi dal carbone		4,0 mm	15,5 mm
I. prova	Peso dello zinco prima dell'azione .	60,60 g	25,05 g
	» dopo l'azione . .	58,60	24,90
	Perdita di peso	2,00	0,15
II. prova	Peso prima	61,60	25,62
	Peso dopo	57,60	25,40
	Perdita	4,00	0,22
III. prova	Peso prima.	57,44	25,58
	Peso dopo	53,50	25,38
	Perdita	3,94	0,20
Perdita media effettiva.		3,31	0,19
Perdita calcolata		3,08	0,20

Se si pensa alla difficoltà di stabilire la giusta distanza degli zinchi dalle pareti di quel vaso di carbone foggiato più a cono irregolare che a cilindro, non può non vedersi nelle precedenti cifre la conferma della legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze dal carbone.

Per la dimostrazione della seconda legge mi valsi prima di una serie di cilindri concentrici collegati metallicamente tra di loro, e col carbone nella parte superiore e parafinati sopra una delle facce; quindi, trovandolo più comodo, ebbi ricorso a piccole lastre rettangolari piane parallele fra di loro, e fissate a due bastoncelli di ottone disposti a croce, la quale portava il carbone all' intersezione di quei bastoncelli: quest' ultima disposizione mi ha concesso di mettere in serie lungo uno dei lati della croce anche sette elementi.

Delle molte esperienze felicemente riuscite con quei due sistemi ne riporto soltanto una eseguita con dieci lastre di zinco larghe 4 cm. circa, che portavano, su tre serie dei pertugi del diametro di 4 mm., destinati ad offrire libero circolo alla corrente, e che vennero disposte come appresso.

Quattro attorniavano il carbone, volgendogli la faccia non parafinata e tenendo una distanza da questi di $3^{cm},5$ in media, le altre sei erano distribuite a distanze eguali lungo il braccio maggiore della croce in ottone. La distanza di una lastra dall' altra era di 3 cm. circa. Le dieci lastre portavano un numero d' ordine onde nelle pesate non nascessero equivoci.

Il seguente prospetto sta ad illustrare l' adottata disposizione e porge i resultati dell' esperienza e del calcolo.

Esperienza VII.

Num. d'ord. delle lastre . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distanze dal centro .		$3^{cm},50$ in media			$6^{cm},50$	$9^{cm},50$	$12^{cm},50$	$15^{cm},50$	$18^{cm},50$	$21^{cm},50$
Peso prima dell' azione	$23^{g},64$	$21^{g},19$	$23^{g},30$	$21^{g},90$	$21^{g},65$	$21^{g},96$	$23^{g},02$	$22^{g},51$	$22^{g},72$	$21^{g},78$
Peso dopo l' azione .	17,38	16,13	17,50	13,95	19,77	21,00	22,60	22,20	22,50	21,62
Perdita effettiva . .	6,26	5,06	5,80	7,95	1,88	0,96	0,42	0,31	0,22	0,16
Perdita calcolata . .		6,27			1,822	0,851	0,490	0,319	0,220	0,169

Siccome i quattro zinchi che circondavano il carbone non offrivano apprezzabile deperimento, così abbiamo accettata la loro perdita media (6g,27) come base dei calcoli per le altre sei lastre.

Sarebbe vano lusingarsi di una corrispondenza più piena tra la perdita effettiva e la calcolata, tanto più che nell' appendere il carbone e gli zinchi alle sbarrette in ottone non riuscì ottenere quella rigorosa equidistanza che il precedente prospetto suppone.

Ponendo a profitto quella maggior pratica che si acquista nel lungo operare, mi sono accinto a sperimentare l'influenza di quella piccola differenza di distanza dal centro del carbone che dipende da grossezza di lastra, ed ecco come ho proceduto.

A due de' soliti sistemi di sbarre incrociate appesi quattro lastre equidistanti dal carbone, avvertendo che in un sistema la faccia attiva guardasse il carbone, nell' altro si volgesse al carbone la faccia parafinata; per tal modo le distanze delle facce attive dal centro dell' elemento chimicamente inattivo erano misurate da 3cm,50 e 3cm,54 in quanto 0mm,04 era lo spessore della lastra.

Ecco i resultati di quell' esperienza.

Esperienza VIII.

Peso degli zinchi prima dell' azione . . .	74,30	73,83
Peso dopo l' azione	70,03	69,65
Perdita effettiva	4,27	4,18
Perdita calcolata	4,2725	4,1778

Chiudo la serie delle prove sperimentali con una eseguita sostituendo al carbone una lastra di rame immersa in solfato di rame come nel sistema Daniell.

Disposi quattro lastre di zinco, parafinate sopra una faccia in modo che due guardassero la destra e la sinistra dell' elemento rame e fossero da quello egualmente distanti, l' altre due sopra la stessa retta a distanza crescente. Il seguente prospetto chiarisce la disposizione ed offre i resultati.

Esperienza IX.

Distanze.	$3^{cm},50$		6,50	9,50
Peso prima dell' azione . .	19,13	16,91	17,37	18,00
Peso dopo l' azione . . .	18,55	16,34	17,20	17,92
Perdita effettiva	0,575		0,170	0,080
Perdita calcolata	0,583		0,168	0,085

Per quanto resulti già dalla esperienza III, che l' intensità della corrente è in perfetta armonia colle enunciate leggi sul consumo dello zinco, lo scrivente si riserba tornare sull' argomento con quelle più estese prove che saranno a lui possibili quando si sarà provveduto del materiale necessario, come si riserba la deduzione dei possibili corollari.



SULL' USO DELLE COORDINATE CURVILINEE NELLE TEORIE DEL POTENZIALE E DELL' ELASTICITÀ; MEMORIA DEL PROF. EUGENIO BELTRAMI.

È noto che l' illustre Maxwell, cercando di dare una forma precisa alle idee di Faraday circa l' esistenza di un mezzo che servirebbe alla propagazione delle azioni elettriche, e che sostituirebbe le cosidette azioni a distanza, è giunto a dimostrare che le forze emananti da un' ordinaria distribuzione di massa, in due ed in tre dimensioni, possono essere effettivamente sostituite, in ogni punto dello spazio, dalle forze dovute ad un certo sistema, esattamente definito, di pressioni e di tensioni analoghe a quelle che regnano nell' interno d' un fluido o d' un mezzo elastico. E propriamente, denotando con V l' ordinaria funzione potenziale dell' immaginata distribuzione di spazio e di superficie e con X_n, Y_n, Z_n, le componenti, secondo tre assi ortogonali delle x, y, z, della pressione unitaria esercitata sopra un elemento piano di normale n, le relazioni trovate da Maxwell sono le seguenti:

$$X_x = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, \qquad Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dy}\frac{dV}{dz},$$

$$Y_y = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, \qquad Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dz}\frac{dV}{dx},$$

$$Z_z = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V; \qquad X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dy},$$

dove si è posto

$$\Delta_1 V = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2.$$

Il sistema di pressioni definito da queste formole, delle quali io ho dato una dimostrazione diretta nella Nota *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche* (Atti del R. Istituto Lombardo, 1884), genera un campo di forza assolutamente identico a quello che si suole considerare come definito dall'ordinaria funzione potenziale V.

Avendo intrapreso varie ricerche sulle formole di Maxwell, all'uopo di analizzarne il significato e di giungere possibilmente alla loro interpretazione ed alla loro genesi dinamica, ho dovuto fra altre cose, esaminare il grado di generalità inerente alle formole stesse, cioè la loro eventuale dipendenza dalla natura dello spazio.

Il procedimento che si offeriva spontaneamente per tale indagine era la deduzione *diretta* delle formole stesse, nell'ipotesi che le coordinate di riferimento fossero assolutamente generali cioè curvilinee, oblique e considerate come indipendenti da qualunque nesso prestabilito colle ordinarie coordinate cartesiane. Ora tale deduzione non era priva di difficoltà, non solo per la mancata possibilità d'invocare la maggior parte delle proposizioni su cui si fonda l'ordinaria teoria, ma eziandio in causa della ben nota complicazione che le coordinate curvilinee introducono nelle formole relative all'elasticità, complicazione la quale, del resto, come ho già avuto occasione di mostrare altrove (Memoria *Sulle equazioni generali dell'elasticità*, Annali di Matematica, 1881), non è un fatto meramente algoritmico, ma ha la sua radice appunto nell'anzidetta questione della natura dello spazio.

Quì poi queste difficoltà diventavano maggiori in causa della rimossa ipotesi dell'ortogonalità [1]). Ciò non ostante, stabilendo certe proposizioni preliminari ed usando opportuni artifizi, ho potuto giungere alla meta e porre in sodo la generalità del risultato ottenuto da Maxwell, con che veniva posta una base più sicura alle ricerche cui alludevo dianzi.

Benchè le conclusioni cui sono fin quì pervenuto in tali ricerche sieno ancora troppo immature ed incomplete perchè possa sembrarne giustificata la pubblicazione, anche parziale, ho tuttavia creduto utile far conoscere la serie dei procedimenti analitici che mi hanno condotto alla dimostrazione generale delle formole di Maxwell, poichè tali procedimenti possono essere opportunamente invocati anche per altri scopi. Essi conducono infatti a stabilire nel modo più generale tutte le proposizioni fondamentali della teoria del potenziale e di quella dell'elasticità. Rispetto alla prima, massimamente, si troveranno quì raccolte, nell'ordine che mi sembra il più naturale e nella forma che mi sembra la più comprensiva, le più importanti equazioni di quel gruppo numeroso e caratteristico che ha, per così dire, il suo centro nel teorema di Green. Nella deduzione di tali equazioni interviene, in particolare, una formola che rappresenta la generalizzazione d'un teorema di Gauss e che sembra non essere stata finora notata, benchè costituisca, a mio credere, l'anello più essenziale della catena. Anche rispetto alla parte cinematica della teoria dell'elasticità, cioè rispetto alla teoria della deformazione infinitesima, si troverà indicata una modificazione dell'ordinario procedimento, la quale permette di assegnare ad un tempo tutte sei le caratteristiche della deformazione d'un parallelepipedo elementare obliquo, senza intervento d'alcuna considerazione geometrica ausiliare.

(Continua).

1) Nell' interessante sua Nota *Sulle equazioni generali per l' equilibrio dei sistemi continui a tre dimensioni* (Atti della R. Accademia di Torino, t. XX), il dottor Morera ha già fatto uso di coordinate curvilinee oblique nella deduzione delle equazioni generali per l' equilibrio elastico. Ma le formole da lui stabilite, notevoli per semplicità ed eleganza, implicano l' esistenza di un ordinario sistema di coordinate cartesiane e non potrebbero essere invocate per lo scopo attuale.

F. Richarz. La formazione dell'ozono, del biossido d'idrogeno e dell'acido persolforico nell'elettrolisi dell'acido solforico diluito . . . . „ 173
H. Wild. Risposta ad alcune osservazioni del sig. Kohlrausch . . . „ 174
Lord Rayleigh. Sul metodo dello smorzamento nella determinazione dell'ohm „ ivi
O. Ehrhardt. Sulla determinazione del calorico specifico e del calorico di fusione ad alte temperature . . . . . „ ivi
H. Knoblauch. Due nuovi metodi per trovare l'angolo di polarizzazione dei metalli „ ivi
A. Blümcke. Sulla determinazione del calorico specifico dell'uranio . „ ivi
W. Möller. Ricerche sperimentali sulla legge dell'emanazione luminosa dei corpi incandescenti . . . . . „ 175
M. Réthy. Osservazioni sulla „ critica della teoria della luce diffratta „ di J. Fröhlich . . . . . „ ivi
E. Lommel. Osservazioni sulla fluorescenza . . . . „ ivi
C. Rammelsberg. Sugli acetati doppi di uranio . . . „ ivi
H. J. Oosting. Nota sulle figure di Kundt . . . „ ivi
R. W. Bunsen. Sull'assorbimento capillare dei gas . . . „ ivi
G. Quincke. Ricerche elettriche . . . . „ 177
O. Lummer. Sulla teoria e sulla forma di nuove curve d'interferenza . „ ivi
C. Christiansen. Ricerche sulle proprietà ottiche dei corpi finamente divisi „ ivi
R. Müller. Sul fotometro di Wild . . . . „ ivi
E. ed L. Natanson. Sulla dissociazione del vapore dell'acido iponitroso . „ ivi
M. Thiesen. Ricerche sull'equazione caratteristica dei corpi . . „ 178
L. Pfaundler. Sull'azione che sotto l'influenza della luce esercita sul vetro la CO_2 fortemente compressa . . . . „ ivi
W. Voigt. Replica all'osservazione del sig. Wüllner, relativa alle esperienze di Jamin sulla riflessione metallica . . . . „ ivi
F. Melde. Ricerche sperimentali acustiche . . . . „ 179
G. Tammann. Sulla tensione dei vapori delle soluzioni saline . . „ ivi
W. von Bezold. Sulle figure di corrente nei fluidi . . . „ ivi
E. Kittler. Sulla misura dell'intensità delle correnti . . „ 180
G. Quincke. Ricerche elettriche . . . . „ ivi
A. Gockel. Sulle relazioni dell'effetto Peltier coll'effetto utile delle pile galvaniche „ ivi
H. Schultze. Sull'azione reciproca di due distribuzioni magnetiche fra loro ortogonali . . . . . „ 181
A. König e F. Richarz. Nuovo metodo per determinare l'accelerazione della gravità „ ivi
L. Arons. Serie d'interferenza nello spettro . . . „ 182
R. Weber. La sirena elettrica . . . . „ ivi
Colacicchi e Marini. Micro-telefono . . . . „ 183

PATTI D'ASSOCIAZIONE

Del Nuovo Cimento si pubblica ogni mese un Fascicolo di tre fogli di stampa.

Le associazioni sono obbligatorie per un anno, e gli Associati che per la fine di Dicembre non avranno disdetta l'associazione, s'intendono obbligati per l'anno successivo.

Il prezzo d'associazione per l'intiero anno è fissato come segue.

Per il Regno Italiano, franco al destino it. L. 10. 50

Per l'Estero, come sopra . . . . » 12. —

Le lettere relative a dimande di associazioni, a pagamenti ed a tutto ciò che riguarda l'amministrazione del Giornale, devono essere dirette, franche di Posta, a Pisa, al Gerente *P. Salvioni* — *Tipografia Pieraccini.*

Ciò che riguarda la Direzione scientifica del Giornale potrà esser diretto a Pisa al prof. *R. Felici.*
